Ensimag 1A **2023-2024**

Probabilités appliquées
Décembre 2023

Durée 3h. Feuille A4 autorisée. Veuillez inscrire votre numéro de groupe sur la copie. Les trois parties du sujet sont indépendantes.

Exercice

Soit X une variable aléatoire de loi binomiale $Bin(n, p)$.

a) En considérant X comme une somme de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes, montrer que la variance de X est égale à $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$.

b) Soit $Y = n - X$. Montrer que la loi de Y est une loi $Bin(n, 1-p)$. *Indice: question facile en utilisant un raisonnement logique.*

c) Calculer la covariance de (X, Y).

Premier problème

Rappel : Soit $a > 0$ et $\lambda > 0$. La loi Gamma de paramètres (a, λ) est définie par la densité de probabilité suivante

$$f(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \, \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x) \, , \quad x \in \mathbb{R},$$

où $\Gamma(a)$ est définie par

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx.$$

Pour tout entier strictement positif, on admet que $\Gamma(n) = (n-1)!$

Soit $\lambda > 0$. On considère un couple de variables aléatoires (v.a.) réelles (X, Y) dont la densité jointe est définie de la manière suivante

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \lambda^2 y^2 e^{-(x+\lambda)y} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^2}(x, y) \, , \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \, .$$

1. Montrer que la loi de la variable aléatoire Y est la loi Gamma de paramètre $(2, \lambda)$.
2. Soit $y > 0$. Montrer que la loi conditionnelle de la variable aléatoire X sachant $Y = y$ est la loi exponentielle de paramètre y.
3. Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

4. En utilisant le changement de variables $v = (\lambda + x)y$, montrer que la densité de probabilité de la loi de la variable X est égale à

$$f_X(x) = \frac{2\lambda^2}{(x+\lambda)^3} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

5. Montrer que la fonction de répartition de X est définie pour tout $t > 0$ par

$$F_X(t) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + t}\right)^2.$$

6. Montrer que l'espérance de la variable X est égale à λ.

7. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $(0, 1)$. Montrer que la loi de la variable

$$X' = \frac{\lambda}{\sqrt{U}} - \lambda$$

est identique à celle de la variable X. Retrouver l'espérance de X.

8. Soit V une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1 indépendante de Y. On pose

$$X^\star = \frac{V}{Y}.$$

Montrer que la loi de la variable $X^\star | Y = y$ est identique à celle de $X | Y = y$.

9. En déduire que $(X^\star, Y)$ et (X, Y) ont même loi.

10. En utilisant le résultat de la question 9, calculer la covariance du couple (X, Y).

Second problème
Réduction de variance par échantillonnage préférentiel.

Rappel : Soit n un entier strictement positif. On admet que l'intégrale de Wallis donnée par

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x) dx$$

vaut $W_1 = 1$ et $W_2 = \pi/4$ pour $n = 1$ et $n = 2$ respectivement.

Dans ce problème on cherche à estimer numériquement par la méthode de Monte Carlo la quantité d'intérêt suivante

$$\mathcal{I} = \int_0^1 \sin(\pi x/2) dx = \frac{2}{\pi}.$$

On va considérer deux estimateurs différents, et comparer leur variance.

1. Soit (U_i) est une suite de v.a. indépendantes et de même loi uniforme $\mathcal{U}(0,1)$. Montrer que l'estimateur
$$Z_n^1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sin(\pi U_i/2)$$
converge vers $\mathcal{I}$.

2. Montrer que
$$\mathrm{Var}(Z_n^1) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2} - \mathcal{I}^2\right).$$

   Dans les questions 3) à 6) on construit un deuxième estimateur basé sur l'échantillonnage préférentiel.

3. Montrer que la fonction $g(x) = 2x\,\mathbf{1}_{(0,1)}(x)$ est une densité de probabilité.

4. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme $U(0,1)$. Montrer que $\sqrt{U}$ suit la loi de densité $g(x)$.

   Pour les questions suivantes on admet que
$$\mathcal{J} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(x)}{x} dx \approx 0.824139.$$

5. Soit (U_i) est une suite de v.a. indépendantes et de même loi uniforme $\mathcal{U}(0,1)$. Montrer que l'estimateur
$$Z_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\sin(\pi\sqrt{U_i}/2)}{2\sqrt{U_i}},$$
converge vers $\mathcal{I}$.

6. Montrer que
$$\mathrm{Var}(Z_n^2) = \frac{1}{n}\left(\frac{\mathcal{J}}{2} - \mathcal{I}^2\right).$$

7. Finalement quel estimateur est le plus précis, Z_n^1 ou Z_n^2 ? Pourquoi ?