Ensimag 1re année **2014-2015**

Probabilités Appliquées
Janvier 2015

Durée 2h00 - Une feuille de format A4 manuscrite autorisée. Pas de calculatrices. Veuillez inscrire votre numéro de groupe sur la copie.

Exercice I - Dans un labyrinthe, un rat se trouve face à 6 portes dont une seule le conduit à la sortie. Il choisit une porte au hasard. S'il ne sort pas, il est reconduit devant les 6 portes et peut faire un nouveau choix, éventuellement identique au précédent. On observe que le rat se souvient très bien du résultat de deux expériences infructueuses successives et qu'il évite toujours les portes associées.

Soit X le temps de sortie du rat, mesuré en nombre de portes utilisées pour sortir du labyrinthe.

1) Montrer que les probabilités des événements $(X = 1)$ et $(X = 2)$ sont égales à $1/6$.

2) Montrer que la probabilité de l'événement $(X = i)$ est égale à $1/6 \times (3/4)^{i-3}$, pour tout $i \geq 3$.

3) Soit N le résultat du lancer d'un dé à 6 faces et G une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $1/4$, indépendante de N. On pose

$$Y = N\mathbb{1}_{(N\leq 2)} + (2 + G)\mathbb{1}_{(N>2)} \,.$$

Montrer que la loi de la variable Y est identique à celle de X.

4) Calculer l'espérance de Y.

5) Calculer la variance de Y.

6) On suppose maintenant que le labyrinthe possède K portes et que le rat se souvient de $m \leq K$ expériences infructueuses successives. Justifier que l'on peut représenter le temps de sortie, à nouveau noté X, de la manière suivante

$$X = N\mathbb{1}_{(N\leq m)} + (m + G)\mathbb{1}_{(N>m)} \,,$$

où N et G sont des variables aléatoires indépendantes, dont on précisera les lois. En déduire l'espérance du temps de sortie.

Exercice II (pts) - Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $(0,1)$, $\alpha > 0$ et A un événement de probabilité x, $0 < x < 1$. On suppose que l'évenement A est indépendant de la variable U.

On parie sur la réalisation de A. Si A se réalise, le gain est $X = \alpha U^2$. Sinon, le gain est $X = -U$ (on perd U). On dit que le pari est *favorable* si l'espérance de gain est positive.

1) Déterminer la fonction de répartition de la loi de la variable X.
2) Déterminer la densité de la loi de X.
3) Justifier que X peut s'écrire de la manière suivante

$$X = \alpha U^2 \mathbb{1}_A - U \mathbb{1}_{\bar{A}} \,.$$

4) Montrer que X est intégrable.
5) Calculer $\mathrm{E}[X]$. Sous quelle condition portant sur α le pari est-il favorable ?

   Dans les questions suivantes, on suppose que $\alpha = 1$.
6) Calculer $\mathrm{E}[X^2]$.
7) Calculer $\mathrm{Var}[X]$. Pour quelle valeur de x la variance est-elle maximale ?
8) Calculer la covariance de X et de U.

Exercice III - On considère un couple (X, Y) de variables aléatoires de densité jointe

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,, \quad f(x,y) = cxy^2 \mathbb{1}_D(x,y) \,,$$

où c est une constante positive et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, 0 < x < y < 1\}$.

1) Déterminer la valeur de c.
2) Déterminer la fonction de répartition de la variable Y.
3) Déterminer la densité de la loi conditionnelle de X sachant $Y = y$ pour tout $y \in (0,1)$.
4) Écrire un algorithme de simulation d'un couple de densité f.
5) On pose $Z = XY$. Déterminer la densité de la loi de la variable Z.