Ensimag 1re année **2016-2017**

Probabilités Appliquées
Janvier 2017

Durée 3h00 – *Aucun document autorisé.*

Questions de base

Question 1. Soit $m, n \geq 1$ et $0 < p < 1$. Soit X une variable aléatoire de loi binomiale $\text{bin}(m, p)$ et Y une variable aléatoire de loi binomiale $\text{bin}(n, p)$, indépendante de X. Sans calcul, déterminer la loi de la variable $Z = X + Y$ (justifier le résultat en une ligne).

Question 2. Soit T une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p, $0 < p < 1$. Démontrer, à l'aide d'un argument de conditionnement, que

$$\mathrm{E}[T] = p + (1-p)(1 + \mathrm{E}[T]).$$

Retrouver le résultat connu pour l'espérance de cette loi.

Question 3. Un jeu nécessite de lancer un dé à 7 faces. Ecrire un algorithme permettant de jouer à ce jeu en utilisant un dé à 6 faces. Justifier la validité de votre algorithme.

Question 4. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $(0, 1)$. On considère la variable V égale à U avec la probabilité $2/3$ et à 1 avec la probabilité $1/3$. Déterminer puis représenter graphiquement la fonction de répartition de la variable V.

Question 5. Calculer l'espérance et la variance de la variable V définie à la question 4.

Question 6. On suppose que le nombre de buts marqués lors d'une partie de football suit une loi de Poisson de paramètre 3. Une proportion $p = 1/3$ des buts sont marqués de la tête. Quelle est la probabilité de voir au moins un but de la tête lors d'une partie de football ?

Question 7. Soit X une variable aléatoire de loi normale, de moyenne nulle et de variance 1. Démontrer que la variable $2X$ est une variable aléatoire de loi normale, de moyenne nulle et de variance 4.

Question 8. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $(0, 1)$ et Y une variable aléatoire dont la loi conditionnelle sachant $X = x$ est la loi exponentielle de paramètre $1/x$, pour tout $x \in (0, 1)$. Calculer l'espérance de Y et la covariance du couple (X, Y).

Question 9. Soit U et V deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $(0, 1)$. Déterminer la densité de la loi de la variable $Z = UV$.

Question 10. Suite de la question 9. Calculer l'espérance de Z.

Problème

---

1. **Transformée de Laplace.** Soit X une variable aléatoire positive. Soit I un intervalle non-vide contenant zéro. Lorsqu'elle est bien définie, on appelle *transformée de Laplace* de la loi de X la fonction suivante

$$\varphi_X(s) = \mathrm{E}[e^{-sX}] , \quad s \in I.$$

   Soit $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ. Pour tout $s > -\lambda$, montrer que

$$\varphi_X(s) = \frac{\lambda}{s + \lambda} .$$

   On admettra qu'une variable aléatoire suit la loi exponentielle de paramètre λ si et seulement si sa transformée de Laplace vérifie la formule ci-dessus pour tout $s \geq 0$.

2. Soit $\alpha > 0$. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1. Montrer que

$$\varphi_{\alpha X}(s) = \varphi_X(\alpha s) , \quad s \geq 0.$$

   En déduire la loi de la variable aléatoire αX.

Dans un labyrinthe, un rat se trouve face à $n + 1$ portes numérotées de 0 à n, dont seule la porte numérotée 0 conduit à la sortie. Le rat choisit aléatoirement une porte selon un tirage aléatoire uniforme. Si la porte 0 est choisie, le rat sort instantanément du labyrinthe. Si la porte k est choisie ($k > 0$), le rat doit attendre un temps aléatoire $X_{n,k}$ avant de pouvoir choisir une nouvelle porte. On suppose que les épreuves sont indépendantes (le rat n'a pas de mémoire), et que $X_{n,k}$ est une variable aléatoire de loi exponentielle d'espérance k/n. On note T_n le temps total d'attente précédant la sortie du labyrinthe.

3. Ecrire un algorithme de Monte-Carlo permettant d'estimer l'espérance de la variable aléatoire T_n.

4. Soit $K \in \{0, \ldots, n\}$ la variable aléatoire correspondant au numéro de la porte choisie par le rat au premier essai. Montrer que

$$\mathrm{E}[T_n | K = 0] = 0$$

et, pour tout $1 \leq k \leq n$,

$$\mathrm{E}[T_n | K = k] = \mathrm{E}[T_n] + \mathrm{E}[X_{n,k}] \,.$$

5. Montrer que

$$\mathrm{E}[T_n] = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}[X_{n,k}] = \frac{n+1}{2} \,.$$

6. Soit $s \geq 0$ et X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1. Montrer que

$$\mathrm{E}[e^{-sT_n} | K = 0] = 1$$

et, pour tout $1 \leq k \leq n$,

$$\mathrm{E}[e^{-sT_n} | K = k] = \varphi_{T_n}(s) \, \varphi_X(ks/n) \,.$$

7. En déduire que, pour tout $s \geq 0$, la transformée de Laplace de la variable T_n est égale à

$$\varphi_{T_n}(s) = \left(n + 1 - \sum_{k=1}^{n} \varphi_X(ks/n) \right)^{-1}$$

8. On pose $Z_n = 2T_n/n$. Pour tout $s \geq 0$, montrer que

$$\varphi_{Z_n}(s) \sim \frac{1}{1+s} \,,$$

lorsque n tend vers l'infini.

Indication. Pour tout $s > 0$, on admettra que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2 + 2ks} \sim \frac{1}{2s} \ln\left(1 + \frac{2s}{n}\right)$$

lorsque n tend vers l'infini. On pourra aussi utiliser le résultat suivant

$$\frac{1}{s} \ln(1+s) = 1 - \frac{s}{2} + \frac{s^2}{3} + o(s^2) \,,$$

lorsque s tend vers zéro.

9. Reconnaître la loi limite de la variable Z_n lorsque n tend vers l'infini. En déduire une approximation de la loi de la variable T_n pour n suffisamment grand.