Ensimag 1re année **2017-2018**

Probabilités Appliquées
Janvier 2018

Durée 3h00 – *Une feuille A4 manuscrite recto-verso autorisée.*

Questions de cours

Question 1. Soit $0 < p < 1$. Soit T une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p. On observe que $T > 3$. Calculer la probabilité de l'événement $(T = 3+i)$, pour tout $i \geq 1$.

Question 2. Un jeu nécessite de lancer un dé à 5 faces. Ecrire un algorithme permettant de jouer à ce jeu en utilisant un dé à 6 faces. Justifier la validité de votre algorithme.

Question 3. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $(0, 1)$. On considère la variable aléatoire X égale à U avec la probabilité $1/3$ et à $3U$ avec la probabilité $2/3$. Déterminer la valeur médiane de la variable X.

Question 4. Calculer l'espérance de la variable X définie à la question 3.

Question 5. On suppose que le nombre de cyclistes passant devant l'Ensimag dans un intervalle de t minutes suit une loi de Poisson de paramètre $2t$, pour tout $t > 0$. On se place devant l'Ensimag. Quelle est la loi du temps d'attente du premier cycliste (justifier) ?

Question 6. Soit $f(x)$ une densité de probabilité définie sur $\mathbb{R}$ et strictement positive en tout point. Pour tout $u \in (0, 1)$, on définit la fonction quantile, $Q(u)$, comme la fonction inverse de la fonction de répartition de $f(x)$. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $(0, 1)$. Déterminer la densité de la loi de la variable $Y = Q(U)$.

Question 7. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $(0, 1)$. Soit I_1 un intervalle de longueur $1/3$ et I_2 un intervalle de longueur $1/6$ inclus dans $(0, 1)$. En moyenne, à combien d'intervalles la variable U appartient-elle ?

Question 8. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $(0, 1)$ et Y une variable aléatoire dont la loi conditionnelle sachant $X = x$ est la loi uniforme sur $(0, x)$, pour tout $x \in (0, 1)$. Calculer l'espérance de la variable alátoire $Z = X + Y$.

Question 9. Calculer la covariance du couple (X, Y) défini à la question 7.

Question 10. Soit U et V deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $(0, 1)$. Déterminer la densité de la loi de la variable $W = UV$.

Problème

Soient (U_n) et (V_n) deux suites de variables aléatoires de loi uniforme sur l'intervalle $(0, 1)$ et indépendantes dans leur ensemble. Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{si } U_n^2 + V_n^2 \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$Z_n^{(1)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \,.$$

1. Pour tout $n \geq 1$, démontrer que la probabilité de l'événement $(U_n^2 + V_n^2 \leq 1)$ est égale à $\pi/4$.

2. Pour tout $n \geq 1$, déterminer sans calcul la loi de la variable aléatoire $nZ_n^{(1)}$.

3. Pour tout $n \geq 1$, calculer l'espérance et la variance de la variable $Z_n^{(1)}$.

4. En déduire que l'espérance $\mathbf{E}[(Z_n^{(1)} - \pi/4)^2]$ converge vers 0. Que signifie ce résultat ?

On considère l'intégrale définie de la manière suivante

$$\mathcal{I} = \int_0^1 \sqrt{1 - u^2} du \,.$$

On pose

$$Z_n^{(2)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 - U_i^2} \,.$$

5. A l'aide d'un argument de conditionnement, démontrer que

$$\mathbf{P}(U_1^2 + V_1^2 \leq 1) = \mathbf{E}[\sqrt{1 - U_1^2}]\,.$$

6. En déduire la valeur de l'intégrale $\mathcal{I}$.

7. Pour tout $n \geq 1$, calculer l'espérance et la variance de la variable $Z_n^{(2)}$.

8. En déduire que l'espérance $\mathbf{E}[(Z_n^{(2)} - \pi/4)^2]$ converge vers 0. Comparer les variances des variables $Z_n^{(1)}$ et $Z_n^{(2)}$. Que conclure ?

On note que

$$\mathcal{I} = \int_0^1 \sqrt{1+w}\sqrt{1-w}dw\,.$$

9. Déterminer une constante $c > 0$ telle que la fonction $g(w) = c\sqrt{1-w}$ définisse une densité de probabilité sur (0,1).

10. Déterminer la fonction de répartition de la loi de densité g.

11. Montrer que la variable aléatoire $W = 1 - U_1^{2/3}$ admet pour densité g.

12. Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$Z_n^{(3)} = \frac{2}{3n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{2 - U_i^{2/3}}\,.$$

Calculer l'espérance et la variance de la variable $Z_n^{(3)}$ (Indication: exprimer l'intégrale $\mathcal{I}$ comme l'espérance d'une fonction de W que l'on précisera).

13. En déduire que l'espérance $\mathbf{E}[(Z_n^{(3)} - \pi/4)^2]$ converge vers 0. Comparer les variances des variables $Z_n^{(2)}$ et $Z_n^{(3)}$. Que conclure ?

On admettra les valeurs numériques suivantes : $\pi(4-\pi) \approx 2.70$, $32/3 - \pi^2 \approx 0.80$, et $448/45 - \pi^2 \approx 0.09$.