Ensimag 1re année **2019-2020**

Probabilités Appliquées
Janvier 2020

Durée 3h00 – *Une feuille de format A4 manuscrite autorisée. Veuillez inscrire votre numéro de groupe sur la copie.*

Questions de cours

---

1. Soit T une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p, $0 < p < 1$. Démontrer, à l'aide d'un argument de conditionnement, que
$$\mathbb{E}[T] = p + (1-p)(1 + \mathbb{E}[T]).$$
Retrouver le résultat connu pour l'espérance de cette loi.

2. Un jeu nécessite de lancer un dé équilibré à 11 faces. Écrire un algorithme permettant de jouer à ce jeu en utilisant un dé équilibré à 6 faces. Justifier à l'aide d'arguments mathématiques que la variable aléatoire produite par votre algorithme est de loi uniforme sur l'ensemble fini $\{1, \ldots, 11\}$.

3. On note $p(x)$ la densité de loi normale d'espérance nulle et de variance égale à un. Calculer
$$h[p] = -\mathbb{E}[\ln(p(X))]\,,$$
où X est une variable de loi de densité $p(x)$.

4. Soit X une variable de loi normale d'espérance nulle et de variance égale à un. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, calculer
$$\phi(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]\,.$$

5. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $(0,1)$ et Y une variable aléatoire dont la loi conditionnelle sachant $X = x$ est la loi exponentielle de paramètre $1/x$, pour tout $x \in (0,1)$. Calculer l'espérance de Y ainsi que la covariance du couple (X,Y).

Problème

On considère la densité de probabilité d'une loi définie sur l'intervalle $[0,1]$ par

$$\forall x \in [0,1]\,, \quad f(x) = \frac{10}{3}x^4 + 2x^5\,.$$

et l'algorithme de simulation suivant

```
Repeat
     U = unif(0,1)
     V = unif(0,1)
Until ( 16*V < 3*f(U) )
X = U
```

où `unif(0,1)` est un générateur aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$.

1. Soit U, V deux variables aléatoires indépendantes, de loi uniforme sur $[0,1]$. Montrer que la probabilité que la condition se réalise est égale à

$$\mathrm{P}(16V < 3f(U)) = \frac{3}{16}\,.$$

2. Soit $t \in [0,1]$. Montrer que

$$\mathrm{P}\left((U \le t) \cap (16V < 3f(U))\right) = \frac{3}{16}\int_0^t f(u)du\,.$$

3. En déduire que la loi de la variable X en sortie de l'algorithme admet pour densité $f(x)$.

4. Déterminer le nombre moyen d'appels du générateur aléatoire dans cet algorithme.

5. On considère désormais l'algorithme de simulation suivant

```
Repeat
     W = unif(0,1)^(1/5)
     V = unif(0,1)
Until ( 16*V < 10 + 6*W )
X = W
```

   Déterminer la densité de la loi de la variable W définie à l'intérieur de la boucle.

6. Montrer que la probabilité que la condition se réalise est égale à

$$\mathrm{P}(16V < 10 + 6W) = \frac{15}{16}\,.$$

7. Montrer que la loi de la variable X en sortie de l'algorithme admet à nouveau $f(x)$ pour densité.

8. Déterminer le nombre moyen d'appels du générateur aléatoire dans le second algorithme. Lequel des deux algorithmes présentés effectue le plus petit nombre d'appels en moyenne ?

9. Soit U, V deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$. Montrer que la loi de la variable aléatoire

$$Y = \mathbb{1}_{(V<2/3)} U^{1/5} + \mathbb{1}_{(V>2/3)} U^{1/6}$$

   admet pour densité $f(x)$.

10. Proposer un nouvel algorithme de simulation nécessitant uniquement deux appels du générateur aléatoire.