Ensimag 1re année **2020-2021**

Probabilités Appliquées
Examen à distance – Janvier 2021

Consignes importantes

L'épreuve a lieu de 8h30 à 12h00. *Le sujet comporte trois pages, cinq exercices et un problème indépendant des exercices. Les correcteurs accorderont une importance particulière à la justification des résultats.*

Les réponses devront être rédigées en au plus cinq lignes. *Les équations devront être séparées du texte et les étapes intermédiaires conduisant aux résultats principaux devront être expliquées verbalement.*

Modalités de rendu. *Le devoir doit être rendu* **dans Teide** *avant* **12h00** *en deux dépôts distincts. Un premier dépôt se fera sous la forme* **pdf** (*ou* html) *non compressé et un second dépôt sous la forme du fichier source* **Rmd** *non compressé.* **Le contenu du fichier pdf (ou html) doit correspondre exactement au contenu du fichier Rmd. Aucun autre document ne sera accepté par les correcteurs**.

Attention, les opérations de dépôt dans Teide sont irréversibles.

L'épreuve est strictement individuelle. *Les documents rendus seront analysés pour détecter d'éventuelles similitudes. Le plagiat, tout comme le non-respect des règles de dépôt, est susceptible d'entraîner l'annulation de la note.*

Symboles LaTeX

$\sum$	\sum	$\mathbb{E}$	\mathbb{E}	$\int$	\int
$\sim$	\sim	$\to$	\to	$\vert$	|
$\exp(x)$	\exp(x)	$\times$	\times	$\sqrt{x}$	\sqrt{x}
ϕ	\phi	π	\pi	λ	\lambda

Exercices

1. Il passe en moyenne quatre cyclistes par minute devant l'école. a) En précisant les hypothèses de modélisation, décrire la loi du temps d'attente du premier cycliste lorsque l'on sort de l'école ? b) Quelle est la probabilité d'attendre plus d'une minute pour voir un cycliste passer devant l'école ?

2. On dispose d'un générateur aléatoire simulant des variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle d'espérance égale à 1. On considère l'intégrale définie de la manière suivante

$$\int_0^\infty \sqrt{x} e^{-x} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} .$$

   a) Décrire une méthode de Monte-Carlo permettant d'approcher la valeur $\sqrt{\pi}$ inspirée du résultat ci-dessus. b) Démontrer que l'espérance de la variable aléatoire simulée par la méthode de Monte Carlo proposée est bien égale à $\sqrt{\pi}$.

3. a) Calculer la variance de la variable aléatoire approchant $\sqrt{\pi}$ dans la méthode de Monte Carlo de la question précédente. b) Vérifier que la variance tend vers zéro.

4. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $(0,1)$ et Y définie de la manière suivante

$$Y = X\sqrt{U} ,$$

   où U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $(0,1)$ indépendante de X. a) Pour tout $x \in (0,1)$, déterminer la densité de la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$. b) En déduire la densité de la loi du couple (X,Y).

5. a) Déterminer la densité de la loi de la variable Y. b) Calculer l'espérance de la variable Y et la covariance du couple (X,Y).

Problème

Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de carré intégrable, de même loi et que leur loi possède une densité. On s'intéresse au calcul de la probabilité pour la variable X_{n+1} soit supérieure à la moyenne des n variables qui la précèdent

$$\pi_n = \mathbb{P}(X_{n+1} > \bar{X}_n)$$

où l'on définit $\bar{X}_n = \sum_{i=1}^n X_i/n$.

1. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes. On note $F(t)$ la fonction de répartition de la loi de X et $S(t) = 1 - F(t)$ la fonction de survie de cette loi. Montrer que
$$\mathbb{P}(X > Y) = \mathbb{E}[S(Y)]\,.$$
2. En utilisant des résultats de cours, suggérer une valeur pour la limite pour la suite π_n. Justifier votre argument sans donner une démonstration mathématique complète.
3. On suppose dans les trois questions suivantes que, pour tout n, la loi de la variable aléatoire X_n est la loi uniforme sur l'intervalle (a, b). Calculer la fonction de survie de cette loi.
4. Calculer l'espérance $\mathbb{E}[X_n]$. Suggérer une valeur pour la limite de la suite π_n.
5. Pour tout $n \geq 1$, démontrer que la suite π_n est constante, en calculant cette constante.
6. On suppose désormais que, pour tout n, la loi de la variable aléatoire X_n est la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Rappeler la valeur de l'espérance $\mathbb{E}[X_n]$. Suggérer une valeur pour la limite de la suite π_n.
7. On considère la fonction $\phi(s)$ définie pour tout $s > 0$ par
$$\phi(s) = \mathbb{E}[e^{-sX_1}]\,.$$
Montrer que
$$\mathbb{E}[S(\bar{X}_n)] = \phi(\lambda/n)^n\,.$$
8. Déduire de la question précédente la valeur exacte de la suite π_n et retrouver la limite suggérée lors de la question 6.