Exam Proba janvier 2022

Durée 3h00, seuls documents autorisés : une feuille A4 manuscrite

Exercices

A. (3 pts)

On suppose de manière réaliste que le temps d'attente (exprimé en secondes) entre deux désintégrations de particules radioactives suit une loi $T \sim \text{Exp}(\theta)$ avec $\theta > 0$. Les désintégrations sont indépendantes. On dispose d'un appareillage capable de détecter les désintégrations.

Grâce à cet appareil, on souhaite réaliser un chronomètre via un comptage de désintégrations successives.

1. (0,5 pts) Rappeler l'espérance et la variance de T.
2. (1 pt) Justifier combien de désintégrations il faudrait compter en moyenne (en fonction de θ) pour chronométrer une durée de une seconde. On note ce nombre n.
3. (1,5 pts) Il existe plusieurs types de particules radioactives qui ont chacune une valeur bien précise de θ. On se demande ici quel type de particule nous devrions utiliser pour réaliser le chronomètre en garantissant une erreur de mesure du temps très faible. Quelle valeur de θ serait adaptée afin de garantir que l'on ait moins de une chance sur 100 de faire une erreur de plus d'un dixième de seconde lors du chronométrage d'une seconde (justifier) ?

B. (4 pts)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[0, 1]$ de densité $f_X(x) = c_k.x^k.1_{[0,1]}(x)$ où $k \geq 1$, c_k est une constante et $1_{[0,1]}$ la fonction indicatrice de l'intervalle $[0, 1]$.

4. (0,5 pts) Calculer c_k.
5. (0,5 pts) Calculer l'espérance de X.
6. (1 pt) On dispose d'un générateur aléatoire U qui suit un loi uniforme sur $[0, 1]$. Donner un algorithme de simulation de X.
7. (1 pt) Soit Y une variable aléatoire telle que la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$ est la loi $\text{Exp}(x)$. Calculer l'espérance de Y.
8. (1 pt) Calculer la covariance du couple (X, Y).

Problème (13 pts)

On se propose d'étudier deux modèles probabilistes de propagation d'une épidémie.

Partie 1 - Début d'épidémie

On considère, en début d'épidémie, qu'une seule personne infecte la population (on appelle cette personne le patient zéro, que l'on note A). On considère que A est donc **infectée** et qu'elle rencontre indépendamment N autres personnes (**saines**) pendant une journée (les infections sont donc des évènements indépendants).

On suppose que la probabilité de transmettre la maladie lors d'une rencontre de A avec une personne saine est p.

Soit Y le nombre de personnes infectées parmi les N à l'issue de la journée.

Question 9 (1 pt)

Quelle est la loi de $Y|N = n$?

Question 10 (1 pt)

Donner la valeur de l'espérance $\mathbb{E}[Y|N = n]$. Exprimer $\mathbb{E}[Y]$ en fonction de $\mathbb{E}[N]$?

Question 11 (1 pt)

On suppose maintenant que le nombre de personnes N rencontrées suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Quelle est la loi de Y ?

Question 12 (1,5 pts)

On s'intéresse maintenant à ce qu'il se passe au bout de quelques jours. On suppose qu'une fraction π_k de la population est infectée (prévalence de la maladie) au jour k. On montre que l'espérance du nombre de personnes nouvellement infectées par A au cours de la journée k est $(1 - \pi_k).\mathbb{E}[Y]$. Calculer l'espérance π_{k+1} de la fraction de la population N infectée à l'issue du jour k. Est-ce que cette valeur dépend de λ ?

Critiquer le modèle.

Partie 2 - Évolution de l'épidémie

Désormais, on considère que les personnes infectées sont contagieuses.

Soit B une personne prise au hasard dans la population. On note X_k la variable aléatoire de Bernoulli indicant son état infectieux (0 : sain, 1 : infecté) au jour k, et on note $\pi_k = P(X_k = 1)$ la prévalance de la maladie.

On considère que B (qui peut être infectée ou non) rencontre N personnes au cours de sa journée (qui peuvent également être infectées ou non). La probabilité de se faire contaminer lors d'une rencontre avec une personne infectée est toujours p.

On considère dans un premier temps que si un individu est infecté au jour k, il devient contagieux au jour $k + 1$ et reste infecté pour tout $k' \geq k$.

Question 13 (1 pt)

Quelle est la probabilité au jour k pour une personne saine de se faire infecter à l'issue d'une rencontre ?

Question 14 (1 pt)

Montrer que la probabilité pour une personne saine d'être infectée à l'issue de ses $N = n$ rencontres de personnes indépendantes au cours de se journée est $1 - (1 - p.\pi_k)^n$.

Question 15 (1 pt)

Si N suit une loi de Poisson de paramètre λ, calculer la probabilité $P(X_{k+1} = 1|X_k = 0)$ pour une personne saine de de se faire infecter au jour k.

Question 16 (1 pt)

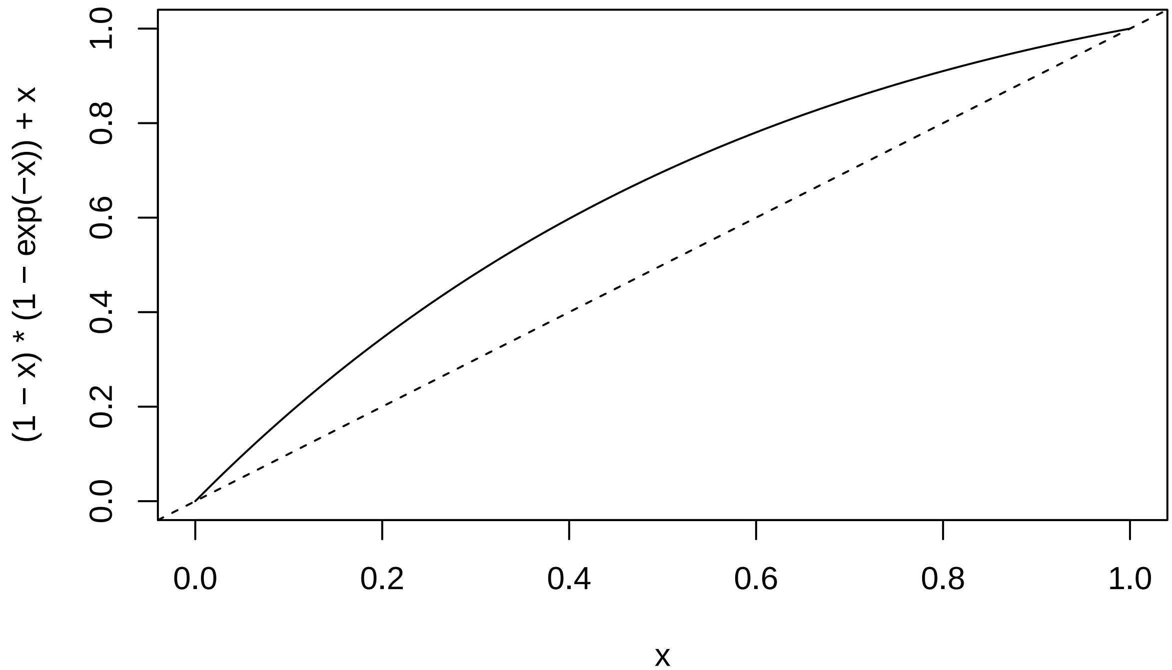
On dispose d'un générateur aléatoire de loi $\text{Exp}(p.\pi_k)$. Donner une méthode simple pour simuler $X_{k+1}|X_k = 0$.

Question 17 (1 pt)

Calculer la probabilité $\pi_{k+1} = P(X_{k+1} = 1)$ d'un individu d'être contaminé au jour $k+1$ en fonction de π_k.

Question 18 (1 pt)

Dans le cas où $\lambda.p = 1$, commenter l'évolution de l'épidémie grâce au graphique suivant :

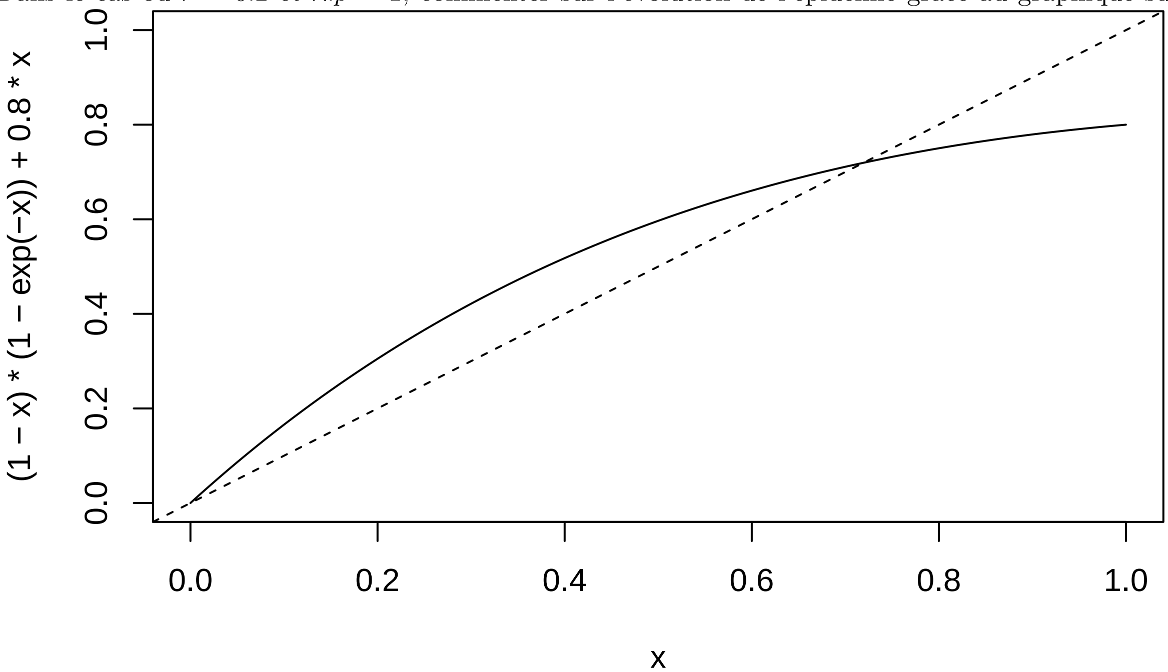


Question 19 (1 pt)

On considère maintenant qu'une personne dont le statut est "infecté" au jour k a une probabilité r de redevenir saine au au jour $k+1$ (et ne **peut pas** se faire infecter en même temps). Quelle est la nouvelle relation entre π_{k+1} et π_k ?

Question 20 (0,5 pt)

Dans le cas où $r = 0.2$ et $\lambda.p = 1$, commenter sur l'évolution de l'épidémie grâce au graphique suivant :



Question 21 (1 pt)

Si un vaccin permet de diviser par 5 la probabilité p d'infection ($p' = \frac{p}{5}$), mais qu'on rencontre 10 fois plus de personnes par jour en moyenne, quel sera l'effet sur la dynamique de l'épidémie ? Est-ce que cela va améliorer les choses ou les empirer ?