# Exam Proba janvier 2023

**Durée 3h00, seuls documents autorisés : une feuille A4 manuscrite Le barème est indicatif.**

## Partie I

### A. Somme finie de loi exponentielles par conditionnement (5 points)

Q0. Rappelez ou calculez l'espérance et la variance de la loi exponentielle de paramètre $\lambda$. On rappelle que la densité de $Exp(\lambda)$ est donnée par $f_{Exp(\lambda)}(t) = \lambda.e^{-\lambda\, t}$.

Q1. Soit $T_1$ et $T_2$ deux variables aléatoires indépendantes et de même loi $Exp(\lambda)$. Par un conditionnement sur $T_2$ montrer que la densité de la variable $T = T_1 + T_2$ s'écrit :

$$f_{T_1+T_2}(t) = \lambda^2\, t\, e^{-\lambda\, t}$$

Q2. Par un raisonnement par récurrence, montrer que si $T_1, ...T_n$ sont $n$ variables aléatoires indépendantes et de même loi $Exp(\lambda)$, alors la densité de la somme $S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$ est une loi gamma $\Gamma(n, 1/\lambda)$ de densité:

$$f_{S_n}(t) = \frac{t^{n-1}\,\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda\, t}$$

Q3. Sans calcul intégral, mais en justifiant vos résultats, calculez l'espérance et la variance de la loi gamma $\Gamma(n, 1/\lambda)$.

### B. Cas limite (2 points)

On s'intéresse au cas $n \to \infty$. Soit $Z_n = \frac{S_n - \mu_n}{\sigma_n}$ où $\mu_n$ et $\sigma_n$ sont respectivement la moyenne et l'écart-type de $\sum_{i=1}^{n} T_i$.

Le théorème central limite assure que $Z_n$ converge en loi vers une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. On veut vérifier ce résultat en s'intéressant à la limite de l'expression de la partie A.

Q4. Montrer que la densité de $Z_n$ s'écrit :

$$f_{Z_n}(t) = \frac{\sqrt{n}}{(n-1)!}[\sqrt{n}t + n]^{n-1}.e^{-\sqrt{n}t - n}$$

Q5. (Calculatoire) Démontrer que lorsque $n \to \infty$, $f_{Z_n}(t)$ tend vers la densité d'une loi normale centrée réduite $f_{\mathcal{N}(0,1)}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$.

*Indice : Utiliser la formule de Stirling :* $n! \sim e^{-n}\sqrt{2\pi\, n} n^n$. *On rappelle également le développement limité du logarithme en 1 est donné par* $ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

## C. Application (4 points)

Dans une rivière, on mesure le temps entre le passage de deux poissons. La durée moyenne entre deux passages successifs est de 20 secondes. On suppose de plus que les durées entre deux passages successifs sont indépendantes et de même loi exponentielle.

$S_n$ est le temps d'attente nécessaire avant d'observer $n$ poissons. On rappelle que $S_n$ suit une loi $\Gamma(n, 1/\lambda)$.

Q6. Soit $F_{\lambda,n}$ la fonction de répartition de $\Gamma(n, 1/\lambda)$. Montrer la relation de récurrence suivante :

$$F_{\lambda,n}(t) = \frac{-(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} + F_{\lambda,n-1}(t)$$

Q7. Quelle est la probabilité qu'on observe au moins $n$ passages de poisson en une minute ? On exprimera cette probabilité à l'aide de $F_{\lambda,n}$.

Q8. Quelle est la probabilité pour que le nombre $N$ de poissons passés en une minute soit égal à $n$ ? Reconnaissez une loi discrète usuelle. Quelle est cette loi et quel est son paramètre ?

Q9. On veut obtenir une estimation du temps moyen entre deux passages. Pour cela on s'intéresse à la valeur empirique $\frac{1}{n}S_n$. La personne en charge de compter les temps de passage s'arrête au bout de $n = 4000$ comptages. Donnez un majorant de la probabilité de se tromper de plus d'une seconde sur la valeur théorique $\frac{1}{\lambda} = 20$. Justifiez.

## D. Simulation (2 points)

On dispose d'un générateur aléatoire de loi exponentielle $X \sim Exp(1)$.

Q10. Proposez un algorithme permettant de simuler des échantillons de loi $Exp(\lambda)$ à partir de $X$.

Q11. En utilisant les résultats des questions précédentes, proposez un algorithme permettant de simuler des échantillons d'une variable aléatoire de loi $Pois(\lambda)$.

# Partie II : simulation de variables aléatoires gaussiennes par polarisation (7 points).

Dans cet exercice en étudie une méthode permettant la simulation d'un couple de v.a. indépendantes de loi commune la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. Cette méthode est souvent désignée sous le nom de "polarisation".

On notera $Exp(\lambda)$ la loi exponentielle de paramètre $\lambda$.

On aura besoin du résultat suivant, qui est une formule de changement de variable pour les intégrales multiples.

**Théorème 1** *Soit $\phi : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d \to \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^m$ un difféomorphisme (i.e. une bijection de classe $C^1$ t.q. $\phi^{-1}$ est aussi de classe $C^1$) et $f$ est une fonction intégrable sur $\mathcal{U}$.*

*Alors on a*

$$\int_{\mathcal{U}} f(u)du = \int_{\mathcal{V}} f(\phi^{-1}(v))\,|\det \mathrm{Jac}\,\phi^{-1}|(v)\,dv$$

.

On note pour tout difféomorphisme $\varphi : \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^m \to \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$ :

$$\mathrm{Jac}\,\varphi = \begin{pmatrix} \partial_{y_1}\varphi_1 & \dots & \partial_{y_m}\varphi_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{y_1}\varphi_d & \dots & \partial_{y_m}\varphi_d \end{pmatrix}$$

avec les $\varphi_i$ définissant les composantes de $\varphi$ : $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_d)$.

On se donne $S$ et $\Theta$ v.a. indépendantes de loi respectives $Exp(\frac{1}{2})$ et $\mathcal{U}(0, 2\pi)$. On pose $R = \sqrt{S}$, ainsi que $X = R\cos(\Theta)$ et $Y = R\sin(\Theta)$.

Q1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonction continue et bornée. Montrer que

$$\mathbb{E}[f(X,Y)] = \int_{(0,2\pi)} \int_0^\infty f(\sqrt{s}\cos\theta, \sqrt{s}\sin\theta)\frac{1}{4\pi}e^{-\frac{1}{2}s} ds\, d\theta.$$

Q2. On introduit le difféomorphisme $\phi$ défini par $\phi(s,\theta) = (x,y)$ avec $x = \sqrt{s}\cos\theta$, $y = \sqrt{s}\sin\theta$.

Montrer que $\phi^{-1}(x,y) = (s,\theta)$ est défini par $s = x^2 + y^2$ et $\theta = (1 - \mathrm{sign}(x))\frac{\pi}{2} + \mathrm{sign}(x)\arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.

Q3. Montrer que

$$\mathrm{J}ac\,\phi^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

*On rappelle que la dérivée de la fonction* $x \mapsto \arcsin(x)$ *est* $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Q4. En déduire que $|\det \mathrm{J}ac\,\phi^{-1}|$ est constant égal à 2.

Q5. Montrer alors que

$$\mathbb{E}[f(X,Y)] = \int\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-\frac{1}{2}y^2}}{\sqrt{2\pi}} dx\, dy.$$

Q6. On admet qu'on aurait aussi bien pu traiter les calculs avec des fonctions indicatrices que des fonctions continues bornées. Déduire de la question précédente que $X$ et $Y$ sont indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0,1)$.

*Indication : Remarquer que* $\mathbb{E}[1_{A\times B}(X,Y)] = P((X,Y) \in A \times B)$.

Q7. Montrer que $-2ln(U)$, où $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ suit une loi $Exp(\frac{1}{2})$.

Q8. En déduire un algorithme de simulation d'un couple de v.a. indépendantes de loi commune $\mathcal{N}(0,1)$, dans lequel on utilise uniquement deux tirages indépendants d'une $\mathcal{U}(0,1)$.