Ensimag 1re année **TD 11 2024**

Probabilités Appliquées
TD révisions

Une feuille de format A4 manuscrite autorisée.

Exercice I

Soit $n \geq 2$ et $(U_i)_{i=1,\dots,n}$, une suite de n variables indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$.

Valeur minimum
On pose $Z_n = \min(U_1, \dots U_n)$.

1) Quelle est la fonction de répartition de la variable aléatoire Z_n ?

2) En déduire la densité de la variable aléatoire Z_n.

3) On dispose d'un générateur aléatoire de nombres suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$. En utilisant la méthode d'inversion, proposez un algorithme de simulation de Z_n.

Cas à deux variables
On pose $Y = U_1\sqrt{U_2}$.

4) On pose $X = U_1$. Soit $x \in (0, 1)$. Montrer que

$$\forall t \in (0,1), \quad \mathrm{P}(Y \leq t | X = x) = \begin{cases} t^2/x^2 & \text{si } t \leq x \\ 1 & \text{si } t \geq x \end{cases}$$

5) Déduire de la question précédente que la densité du couple (X, Y) est donnée par
$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \frac{2y}{x^2}\mathbb{1}_\Delta(x, y)\,,$$
où $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\, 0 < y < x < 1\}$.

6) Montrer que la loi de Y est identique à celle de la variable Z_2.

7) Calculer l'espérance de Y, ainsi que la covariance $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Exercice II

Gogoland est un lieu avec des machines à sous. En jouant une partie sur une machine, on peut y gagner un jackpot avec la probabilité p, et ne rien gagner avec la probabilité $q = 1 - p$. Les machines sont indépendantes les unes des autres. Le patron du lieu reçoit un visiteur. Il ne dit pas au visiteur combien il possède de machines à sous, mais il lui dit que **chacune de ses machines a joué plus de k parties sans qu'aucun jackpot n'ait encore été gagné**. Pour le visiteur, le nombre inconnu de machines à sous est modélisé comme la réalisation d'une variable aléatoire notée N.

1) Sous quelles hypothèses la loi de probabilité décrivant le nombre de parties jouées sur une machine à sous avant un jackpot est la loi géométrique de paramètre p ? On supposera ces hypothèses vérifiées.

2) Soit T le plus petit nombre de parties jouées quelle que soit la machine à sous. Montrer que

$$\mathrm{P}(T > k | N = n) = q^{nk}\,, \quad n \geq 1.$$

3) On suppose que N suit la loi géométrique de paramètre $(1 - \alpha)$, où α vérifie $0 < \alpha < 1$. Calculer la probabilité de l'événement $(T > k)$.

4) À l'aide des questions précédentes, montrer que la probabilité conditionnelle de l'événement $(N = n)$ sachant $(T > k)$ est égale à

$$\mathrm{P}(N = n | T > k) = (1 - \alpha q^k)(\alpha q^k)^{n-1}\,, \quad n \geq 1.$$

Identifier la loi de probabilité conditionnelle définie ci-dessus.

5) Vérifier que l'expression précédente admet une limite pour tout $n \geq 1$ lorsque α tend vers 1. Vérifier que le passage à limite définit une loi de probabilité que l'on peut reconnaître.

6) Calculer l'espérance de la loi identifiée à la question 5). On suppose que α tend vers 1, que $p = 10^{-6}$ et que $k = 50000$. En déduire que l'espérance du nombre de machines à sous tend vers une valeur proche de $1/(1 - e^{-0.05}) \approx 21$.

Bonus Partie I

Différences successives

Pour tout $i = 1, \ldots, n-1$, on pose

$$X_i = U_{i+1} - U_i \quad \text{et} \quad Y_i = |X_i|.$$

1) Pour quelles valeurs de i et j les variables aléatoires X_i et X_j sont-elles indépendantes ?

2) Calculer l'espérance et la variance de X_i pour $1 \leq i < n$.

3) On appelle fonction caractéristique d'une variable aléatoire Z la fonction définie par $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi_Z(t) = \mathbb{E}[e^{itZ}]$ où i est le nombre unité imaginaire.

   La fonction caractéristique possède les propriétés suivantes:

   (A) Si S et T sont des variables aléatoires, alors $\varphi_{S-T} = \varphi_S.\varphi_{-T}$,

   (B) Si $\varphi_S = \varphi_T$ alors S et T suivent la même loi.

   Montrer que pour tout $1 \leq i < n$, la fonction caractéristique de X_i est

$$\varphi_{X_i}(t) = 2.\frac{1 - \cos(t)}{t^2}$$

4) Déduire de la question précédente que pour $1 \leq i < n$, X_i admet pour densité

$$f_{X_i}(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \forall x \in [-1, 1] \\ 0 & \forall \text{ailleurs} \end{cases}$$

5) Calculer la densité de Y_i pour $1 \leq i < n$.

6) Soit $\epsilon > 0$. Montrer que

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{P}\left(|\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} Y_i - \frac{1}{3}| > \epsilon \right) = 0.$$