Probabilités appliquées - TD3

1 Partie 1

1.1 Exercice 1

- On considère l'évènement $[max(M,N) \leq m] = [M \leq m] \cap [N \leq m]$.
  Sachant que les lancers sont indépendants, on obtient donc :

$$\mathbb{P}(max(M,N) \leq m) = \mathbb{P}(M \leq m) \times \mathbb{P}(N \leq m). \tag{1}$$

  De plus, $\mathbb{P}(M \leq m) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(M = i) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2m} = \frac{1}{2}$.
  De même, on obtient $\mathbb{P}(N \leq m) = \frac{m}{n}$.

  Ainsi,

$$\mathbb{P}(max(M,N) \leq m) = \frac{m}{2n}. \tag{2}$$

- Soit

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M+N \leq m) &= \mathbb{P}(M \leq m-N) \\
&= \sum_{k=1}^{m-1} \mathbb{P}(M \leq m-k \,\cap\, N = k) \\
&= \sum_{k=1}^{m-1} \mathbb{P}_{(N=k)}(M \leq m-k) \times \mathbb{P}(N = k) \\
&= \sum_{k=1}^{m-1} \frac{m-k}{2m} \times \frac{1}{n} \\
&= \underbrace{\sum_{k=1}^{m-1} k \times \frac{1}{2mn}}_{Changement\ de\ variable\ :\ k'=m-k} \\
&= \frac{1}{2mn} \times \frac{m(m-1)}{2} \\
&= \frac{m-1}{4n}
\end{aligned} \tag{3}$$

TD3 - Partie 1

Exercice 2

Q1

Soit $n \in \mathbb{N}$

On définit les événements suivants :

$$D_n = \text{"Le chat est dehors le n-ième soir"} I_n = \text{"Le chat est à l'intérieur le n-ième soir"}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
&P(D_{n+1} | I_n) = p \\
&P(D_{n+1} | D_n) = 1 - q \\
&P(D_{n+1} | I_n) = q \\
&P(D_{n+1} | D_n) = 1 - p
\end{aligned}$$

Comme le chat est soit dehors soit à l'intérieur le n-ème soir, $\{D_n, I_n\}$ est un système complet d'événements. La formule des probabilités totales livre :

$$\begin{aligned}
P(D_n) &= P(D_n | I_{n-1})P(I_{n-1}) + P(D_n | D_{n-1})P(D_{n-1}) \\
&= p(1 - \pi_{n-1}) + (1 - q)\pi_{n-1} \\
&= (1 - p - q)\pi_{n-1} + p
\end{aligned}$$

Q2

On fait face à une suite arithmético-géométrique, on résout donc d'abord l'équation :

$$\begin{aligned}
&l = (1 - p - q)l + p \\
\iff\ &l = \frac{p}{p + q}
\end{aligned}$$

On pose ensuite pour tout $n \in \mathbb{N},\ v_n := \pi_n - l$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
v_n &= \pi_n - l \\
&= \pi_n - \frac{p}{p + q} \\
&= (1 - p - q)\pi_{n-1} + p - \frac{p}{p + q} \\
&= (1 - p - q)(\pi_{n-1} + \frac{p}{1 - p - q} - \frac{p}{(1 - p - q)(p + q)}) \\
&= (1 - p - q)(\pi_{n-1} + \underbrace{\frac{p(p + q) - p}{(1 - p - q)(p + q)}}_{-p/(p+q) = -l}) \\
&= (1 - p - q)v_{n-1}
\end{aligned}$$

(v_n) est donc une suite géométrique de raison $1 - p - q$, on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = (1 - p - q)^n v_0$$

Puis par définition de (v_n) :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \pi_n = (1 - p - q)^n v_0 + \frac{p}{p + q}$$

Or :

$$\pi_0 = 0 = v_0 + \frac{p}{p + q}$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \pi_n = -(\underbrace{1 - p - q}_{\in]-1,1[})^n \frac{p}{p + q} + \frac{p}{p + q}$$

Finalement :

$$\lim_{n \to \infty} \pi_n = \frac{p}{p + q}$$

TD3 - Partie 2

Question n°1

En posant $\forall i \in \mathrm{N}^*, F_i =$" l'issue du i-ème tirage est face " , les $(F_i)_{i \in \mathrm{N}^*}$ sont indépendants deux à deux.

On a $\forall i \geq 2, FF_i = F_{i-1} \cap F_i$, donc ;

$P(FF_3) = P(F_3 \cap F_2) = P(F_3)P(F_2) = \frac{1}{4}$

$P(FF_3 | FF_2) = P(F_3 \cap F_2 | F_2 \cap F_1) = P(F_3 | F_2 \cap F_1)P(F_2 | F_2 \cap F_1) = P(F_3) \times 1 = \frac{1}{2}$

Les $(FF_i)_{i \geq 2}$ ne sont donc pas indépendants deux à deux.

Question n°2

$X_n = \sum_{k=2}^{n} 1_{FF_k}$

Ce qui décrit X_i comme une variable étagée (1 est l'indicatrice).

On a donc, malgré la non-indépendance des $(FF_i)_{i \geq 2}$:

$\mathrm{E}[X_n] = \sum_{k=2}^{n} P(FF_k) = \sum_{k=2}^{n} P(F_k)P(F_{k-1}) = \frac{n-1}{4}$

Montrons que X_3 n'est pas une variable aléatoire binomiale.

La Loi de X_3 est donnée par:

$P(X_3 = 0) = \frac{5}{8}, P(X_3 = 1) = \frac{1}{4}, P(X_3 = 2) = \frac{1}{8}$

Supposons X_3 binomiale de paramètres $p \in [0, 1], n \in \mathrm{N}^*$, on a nécessairement n=3 car $X_3(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

Ainsi la loi de X_3 est donnée par:

$P(X_3 = 0) = (1-p)^2, P(X_3 = 1) = 2p(1-p), P(X_3 = 2) = p^2$

On obtient donc ;

$p^2 = \frac{1}{8}$ et $p \geq 0 \Rightarrow p = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

or $(1-p)^2 = \frac{5}{8}$ et $p \geq 0 \Rightarrow p = 1 - \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \neq \frac{1}{2\sqrt{2}}$

Il est donc impossible que X_3 soit binomiale.

Question n°3:

On a pour n=2 :

$P(X_2 = 0) = 1 - P(F_1 \cap F_2) = \frac{3}{4} = \frac{f_2}{2^2}$

Soit $n \geq 2$, supposons $P(X_n = 0) = \frac{f_n}{2^n}$ et $P(X_{n-1} = 0) = \frac{f_{n-1}}{2^{n-1}}$

$P(X_{n+1} = 0) = P((X_{n+1} = 0) \cap F_{n+1}) + P((X_{n+1} = 0) \cap \overline{F_{n+1}})$

$= P((X_{n+1} = 0) \cap F_{n+1}) + P((X_n = 0) \cap \overline{F_{n+1}})$

$= P((X_{n+1} = 0) \cap F_{n+1}) + \frac{1}{2}P(X_n = 0)$

$= P((X_{n+1} = 0) \cap F_{n+1} \cap F_n) + P((X_{n+1} = 0) \cap F_{n+1} \cap \overline{F_n}) + \frac{1}{2}P(X_n = 0)$

$= 0 + P((X_{n-1} = 0) \cap F_{n+1} \cap \overline{F_n}) + \frac{1}{2}P(X_n = 0)$

$= \frac{1}{4}P(X_{n-1} = 0) + \frac{1}{2}P(X_n = 0)$

$= \frac{1}{4} \times \frac{f_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{1}{2} \times \frac{f_n}{2^n} = \frac{f_{n-1}+f_n}{2^{n+1}} = \frac{f_{n+1}}{2^{n+1}}$

D'où, par le principe de récurrence, on a ; $\forall n \geq 2, P(X_n = 0) = \frac{f_n}{2^n}$.

Emilie COLLIN DUPEROUX, Louis DELION, Quentin BOYER