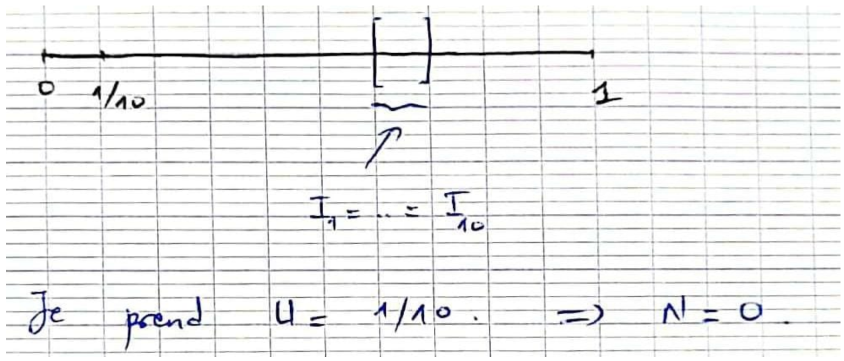
TD n°4

EL Barkany Mohammed

Derghazi Ziyad

Noah Deplace

1- ⋆



⋆ **2 situations extrêmes :**

- Pour $I_i = \left]\dfrac{i-1}{10}, \dfrac{i}{10}\right[$ on a $\mathbb{P}(N=1) = 1$ donc $\mathbb{E}(N) = 1$ et $\mathbb{V}(N) = 0$.
- Pour $I_i = \left]0, \dfrac{1}{10}\right[$ on a : $\mathbb{E}(N) = 10 \times \dfrac{1}{10} + 0 \times \dfrac{9}{10} = 1$ et $\mathbb{V}(N) = 9$.

2- Pour $A_k =$"$u \in I_k$", on a : $N = \displaystyle\sum_{k=1}^{K} \mathbb{1}_{A_k}$, (si $u \in I_k$ on ajoute 1 à N, on ajoute 0 sinon).

Donc $\mathbb{E}(N) = \displaystyle\sum_{k=1}^{K} l_k = 1$

$\rightarrow$ Les $\mathbb{1}_{A_k}$ sont indépendantes identiquement distribuées de loi $\mathcal{B}(\frac{1}{10})$

Donc si $N \sim \mathcal{B}(n,p)$ alors $n = 10$ et $p = \dfrac{1}{10}$, dans ce cas on a toujours :

$\mathbb{P}(N=1) = \dbinom{10}{1} \dfrac{1}{10} \left(\dfrac{9}{10}\right)^9 = \left(\dfrac{9}{10}\right)^9 \neq 1.$

Or pour la 1ère *configuration* de la **question 1** on a : $\mathbb{P}(N=1) = 1$

Donc N ne suit pas une loi binomiale.

3- On a $\mathbb{V}(N) = \mathbb{E}(N^2) - \mathbb{E}(N)^2$,

Et on a : $N^2 = \displaystyle\sum_{i,j} \mathbb{1}_{A_i} \times \mathbb{1}_{A_j} = \sum_{i,j} \mathbb{1}_{A_i \cap A_j}$, donc $\mathbb{E}(N^2) = \displaystyle\sum_{i,j} l(I_i \cap I_j)$

et $\mathbb{E}(N)^2 = 1 = \mathbb{E}(N) = \displaystyle\sum_{i=1}^{K} l_i$

Donc : $\mathbb{V}(N) = \sum_{i \neq j} l(I_i \cap I_j) = 2 \sum_{i<j} l(I_i \cap I_j)$

Pour $K = 10$ et $l_k = \dfrac{1}{10}$, on a : $\mathbb{V}(N) = 2 \sum_{i=2}^{10} \sum_{j=1}^{i-1} l(I_i \cap I_j) \leqslant 2 \sum_{i=2}^{10} \sum_{j=1}^{i-1} l(I_i) = 9$

$\to$ Cette borne est optimale car atteinte dans le cas : $I_1 = \cdots = I_{10}$

4- $\star$ On a $N = \sum_{k=1}^{K} \mathbb{1}_{A_k}$ donc $\mathbb{E}(N) = K.l$ avec $l = l_1$.

$\star$ On a : $N^2 = \sum_{i,j} \mathbb{1}_{A_i} \times \mathbb{1}_{A_j} = \sum_{i,j} \mathbb{1}_{A_i \cap A_j} = 2 \sum_{i<j} \mathbb{1}_{A_i \cap A_j} + \sum_{k=1}^{K} \mathbb{1}_{A_k}$

Donc $\mathbb{E}(N^2) = l.K + 2 \sum_{i<j} l(I_i \cap I_j) \leqslant l.K + 2 \sum_{i=2}^{K} (i-1)l = lK^2$

D'où $\mathbb{V}(N) \leqslant lK^2 - (lK)^2 = lK^2(1-l)$

$\to$ Cette borne est optimale. En effet pour $I_1 = \cdots = I_K$, on a :

$$\mathbb{V}(N) = l.K^2 - (lK)^2$$

Généralisation :

On note $B_k = B(0, r_k)$, alors on a : $\mathbb{P}(u \in B_k) = r_k^2$. Il suffit alors de remplacer, dans les calculs précédents, l_k par r_k^2. On obtient : $\mathbb{E}(N) = r_1^2 K$ et $\mathbb{V}(N) \leqslant K^2 r_1^2 (1 - r_1^2)$.

Cette borne est encore atteinte pour : $B_1 = ... = B_K$.