Correction TD 1 :

1ère Partie :

Exercice 1 :

$$\mathbb{P}(X \in [t, s[\,) = \int_s^t e^{-x}dx \quad \forall\, 0 \leq s \leq t < \infty$$

Q 1 :

On a $A_k = (X \in [t,\ t+k[\,)_{k\in\mathbb{N}}$ suite croissante d'évenements

On a donc :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P(X \in [t, +\infty[\,) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n\to\infty} \int_t^{t+n} e^{-x}dx$$

$$\text{or } \lim_{n\to\infty} \int_t^{t+n} e^{-x}dx = \int_t^{\infty} e^{-x}dx = [-e^{-x}]_t^{\infty} = e^{-t}$$

$$\text{d'où } \boxed{\mathbb{P}(X \in [t, \infty[\,) = e^{-t}}$$

$$\mathbb{P}(\sin X \geq 0) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \underbrace{(X \in [2n\pi, (2n+1)\pi)}_{\text{disjoints}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} e^{-x}dx$$

$$\mathbb{P}(\sin X \geq 0) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n\pi} - e^{-(2n+1)\pi} = (1 - e^{-\pi}) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n\pi} = \frac{1 - e^{-\pi}}{1 - e^{-2\pi}} = \frac{1}{1 + e^{-\pi}}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\sin X \geq 0) = \frac{1}{1 + e^{-\pi}}}$$

Q 2 :

$$\ln\left(\frac{1}{U}\right) \in [s, t[\Leftrightarrow \ln(U) \in\,]-t, -s] \Leftrightarrow U \in\,]e^{-t}, e^{-s}]$$

$$\mathbb{P}\left(\ln\left(\frac{1}{U}\right) \in [s, t[\right) = \mathbb{P}(U \in [e^{-t}, e^{-s}[) = e^{-s} - e^{-t}$$

$$\boxed{\ln\left(\frac{1}{U}\right) \sim X}$$

On reconnait la même loi que X

$2^{ème}$ partie :

Exercice 1 :

$$\mathbb{P}(X=6)=\mathbb{P}(\text{dé1}=6)\times\mathbb{P}(\text{sample}=6)=\frac{1}{36}$$

$$\mathbb{P}(X=1)=\sum_{n=1}^{6}\left(\mathbb{P}(\text{dé1}=n)\times\mathbb{P}(\text{sample}=1)\right)=\sum_{n=1}^{6}\frac{1}{6}\times\frac{1}{n}$$

$$\mathbb{P}(X=1)=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)=\boxed{\frac{49}{120}}$$

Exercice 2 :

Q 1 :

$$\mathbb{P}(\text{Vald marque})=\sum\text{Prop tir k points}\times\text{proba touche}=\frac{1}{3}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\frac{1}{4}=\frac{9}{24}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\text{Vald marque})=\frac{9}{24}}$$

Q 2 :

$$\mathbb{P}(\text{3 points}|\text{raté})=\frac{\mathbb{P}\left(\text{3 points}\cap\overline{\text{Vald marque}}\right)}{\mathbb{P}\left(\overline{\text{Vlad marque}}\right)}=\frac{\frac{1}{6}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)}{1-\frac{9}{24}}=\frac{3}{15}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\text{3 points}|\text{raté})=\frac{1}{5}}$$

$$\mathbb{P}(\text{3 points}|\text{réussite})=\frac{\mathbb{P}(\text{3 points}\cap\text{Vlad marque})}{\mathbb{P}(\text{Vlad marque})}=\frac{\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}}{\frac{9}{24}}=\frac{1}{9}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\text{3 points}|\text{réussite})=\frac{1}{9}}$$

Q 3 :

Quand Vlad réussit un tir, il y a une chance sur 9 que ça soit un tir à 3 points : $\boxed{N_{\text{tir moy}}=9}$