Correction TD10

Thirion Lucas, Triki Mariem, Vidon Thomas, Zougari Rania

Décember 2023

1 Exercice 1

On considère une suite (X_n) de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur (0,1). Soit a un nombre tel que $0 < a < 1$.On définit la variable aléatoire $N(a)$ de sorte que:

$N(a) = \{n \geq 1 | X_1 + ... + X_n \geq a\}$

1.1 Question 1

Soit $x \in (0, 1)$ En discutant selon les valeurs $x > a$ ou $x \leq a$, donner une expression de l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[N(a)|X_1 = x]$ ne laissant plus apparaître le conditionnement.

Réponse:

- Cas 1: si $x > a$.

Dans ce cas $N(a) = 1$

Par la suite :

$$\mathbb{E}[N(a)|X_1 = x] = \mathbb{E}[1|X_1 = x] = 1$$

- Cas 2: si $x \leq a$.

  On a :

$$\begin{aligned}
N(a) &= \{n \geq 1 | X_1 + ... + X_n \geq a\} && (1)\\
&= \{n \geq 1 | x + ... + X_n \geq a\} && (2)\\
&= \{n \geq 1 | X_2 + ... + X_n \geq a - x\} && (3)\\
&= \{n \geq 2 | X_1 + ... + X_n \geq a - x\} && (4)\\
&= 1 + \{n \geq 1 | X_1 + ... + X_n \geq a - x\} && (5)
\end{aligned}$$

Puis: $\forall a, x \in [0, 1]$tels que $x \leq a$

$$\mathbb{E}[N(a)|X_1 = x] = \mathbb{E}[N(a - x) + 1] = 1 + \mathbb{E}[N(a - x)]$$

1.2 Question 2

- Déduire de la question précédente que, pour tout $0 < a < 1$, nous avons: $\mathbb{E}[N(a)] = 1 + \int_0^a \mathbb{E}[N(y)]dy$

Réponse:
On a:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[N(a)] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[N(a)|X_1]] && (6)\\
&= \int_0^1 \mathbb{E}[N(a)|X_1 = x]1dx && (7)\\
&= \int_0^a \mathbb{E}[N(a)|X_1 = x]dx + \int_a^1 \mathbb{E}[N(a)|X_1 = x]dx && (8)\\
&= \int_0^a (\mathbb{E}[N(a-x)] + 1)dx + \int_a^1 1dx && (9)\\
&= \int_0^a \mathbb{E}[N(a-x)]dx + \int_0^1 1dx && (10)\\
&= \int_a^0 -\mathbb{E}[N(y)]dy + 1 && (11)
\end{aligned}$$

On pose le changement de variables y = a - x, dx = -dy

$$\mathbb{E}[N(a)] = 1 + \int_0^a \mathbb{E}[N(y)]dy \tag{12}$$

1.3 Question 3

- Résoudre l'équation précédente pour trouver l'expression de $\mathbb{E}[N(a)]$

Réponse:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[N(a)] = 1 + \int_0^a \mathbb{E}[N(x)]dy && (13)\\
\implies& (\mathbb{E}[N(a)])' = (1 + \int_0^a \mathbb{E}[N(x)]dx)' && (14)\\
\implies& (\mathbb{E}[N(a)])' = \mathbb{E}[N(a)] && (15)\\
\implies& \mathbb{E}[N(a)] = ke^a,\ k \in \mathbb{R} && (16)\\
& && (17)
\end{aligned}$$

On cherche k

$$\begin{aligned} ke^a &= \int_0^a ke^x && (18)\\ \iff ke^a &= 1 + [ke^x]_0^a && (19)\\ \iff ke^a &= 1 + ke^a - k && (20)\\ \iff k &= 1 && (21)\\ & && (22) \end{aligned}$$

Ainsi:

$$\mathbb{E}[N(a)] = e^a \quad \forall a \in [0,1] \tag{23}$$

2 Exercice 2

On considère une suite $(Un)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $(0,1)$, et on pose $U_0 = x, x \in (0,1)$. On dit qu'il y a record au temps m si la variable U_m est plus grande que toutes les variables précédentes. On note N_n le nombre de records au temps $n \geq 1$. On pose ensuite

$$\forall n \geq 1, f_n(x) = \mathbb{E}(N_n)$$

2.1 Question 1

- Calculer $f_1(x)$.

  Réponse :

  $\underline{f_1(x)} = \mathbb{E}[N_1] = \int_0^1 \mathbb{1}_{u<x} du = \int_0^x 0du + \int_x^1 1du = [u]_x^1 = \underline{1-x}$

- Donner une formule reliant l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[N_{n+1}|U_1 = u]$ à la fonction $f_n(x)$.

  Réponse :

  Si $u \leq x$: on a encore la possibilité de faire un record avec n variables aléatoires donc :

  $$\mathbb{E}[N_{n+1}|U_1 = u] = \mathbb{E}[N_n] = f_n(x)$$

  Si $u > x$: on a fait un record et il reste n variables aléatoires pour faire des records, en sachant qu'il faudra être au moins supérieur à u donc :

  $$\mathbb{E}[N_{n+1}|U_1 = u] = 1 + f_n(u)$$

2.2 Question 2:

- Montrer que:

  $$1 - f_{n+1}(x) = x(1 - f_n(x)) - \int_x^1 f_n(u)\, du$$

D'après la question précedente: soit $n \in \mathbb{N}$ et $u, x \in [0,1]$

$$\mathbb{E}[N_{n+1}|U_1 = u] = \begin{cases} 1 + f_n(u) & \text{si } u > x \\ f_n(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'après la formule de conditionnement:

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= \mathbb{E}[N_{n+1}] && (24) \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[N_{n+1}|U_1]] && (25) \\ &= \int_{\mathbf{R}} \mathbb{E}[N_{n+1}|U_1 = u] f_{U_1}(u)\,\mathrm{d}u && (26) \\ &= \int_0^x \mathbb{E}[N_{n+1}|U_1 = u] f_{U_1}(u)\,\mathrm{d}u + \int_x^1 \mathbb{E}[N_{n+1}|U_1 = u] f_{U_1}(u)\,\mathrm{d}u && (27) \end{aligned}$$

Puisque $U_1 \sim \mathcal{U}(0,1)$, alors : $\forall u \in [0,1] : f_{U_1}(u) = 1$ Ainsi:

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= \int_0^x \mathbb{E}[N_{n+1}|U_1 = u])\,\mathrm{d}u + \int_x^1 \mathbb{E}[N_{n+1}|U_1 = u]\,\mathrm{d}u && (28) \\ &= \int_0^x f_n(x)\,\mathrm{d}u + \int_x^1 (1 + f_n(u))\,\mathrm{d}u && (29) \\ &= x f_n(x) + 1 - x + \mathrm{d}u + \int_x^1 f_n(u)\,\mathrm{d}u && (30) \\ &= -x(1 - f_n(x)) + 1 + \int_x^1 f_n(u)\,\mathrm{d}u && (31) \end{aligned}$$

Finalement:

$$1 - f_{n+1}(x) = x(1 - f_n(x)) - \int_x^1 f_n(u)\,\mathrm{d}u$$

2.3 Question 3:

On suppose que $f_n(x)$ est dérivable, et on appelle $g_n(x)$ sa dérivée.

- Trouver l'équation satisfaite par $g_n(x)$ puis la résoudre.

  Réponse:

  Si on dérive l'équation de la question 2, on obtient :

  $-g_{n+1}(x) = (1 - f_n(x)) - g_n(x) \cdot x + f_n(x)$.

  Donc $g_{n+1}(x) = g_n(x) \cdot x - 1$.

  Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique. On pose l la solution de l'équation $l = x * l - 1$.

  Par suite $l = \frac{1}{x-1}$.

  On pose $v_n(x) = g_n(x) - \frac{1}{x-1}$. On a bien $v_n(x)$ une suite géometrique de raison x, donc $v_n(x) = x^{n-1} \cdot v_1 = x^n \cdot \frac{1}{1-x}$.

  par suite $g_n(x) = \frac{x^n - 1}{1-x}$.

- En déduire que

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$$

Réponse:

Avec le développement série entière, on a : $g_n(x) = -(\sum_{k=0}^{n-1} x^k)$.

On intègre terme à terme : $f_n(x) = c - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$ avec c une constante.

Pour trouver c, sachant que $f_n(x) = E(N_n)$, si x tend vers 0, alors $E(N_n)$ tend vers 0.

En fait, pour n fixe, x s'approche de 1 jusqu'à dépasser les valeurs de $U_1, \ldots, U_n$, dans ce cas là $N_n = 0$. Par conséquent, $f_n(x)$ tend vers 0, ce qui donne $c - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 0$.

Ainsi,

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$$