Correction TD6

Loïs Guillin et Léo Ferveur

November 2023

Exercice 1

Question 1 : On cherche la fonction de répartition on calcule donc $P(x < t)$

$$P(X < t) = P(X < t|Pile) \cdot P(Pile) + P(X < t|Face) \cdot P(Face)$$

car Pile et Face forment un système complet d'événement.
Mais $P(Pile) = p$ et $P(Face) = 1 - p$
De plus $P(X < t|Pile) = P(U < t)$ et $P(X < t|Face) = P(U < \frac{t}{2})$
La fonction de répartition de U (qui suit une loi uniforme sur (0,1) est :

$$P(U < t) = \begin{cases} 0 \ si \ t \leq 0 \\ t \ \ si \ 0 \leq t \leq 1 \\ 1 \ si \ t \geq 1 \end{cases}$$

En sommant comme $p = \frac{2}{3}$ on obtient

$$P(X < t) = \begin{cases} 0 & si \ t \leq 0 \\ \frac{5}{6} \cdot t & si \ 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{2}{3} + \frac{t}{6} & si \ 1 \leq t \leq 2 \\ 1 & si \ t \geq 1 \end{cases}$$

En dérivant par morceaux on obtient la fonction de densité suivante :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 \ \ si \ t \leq 0 \\ \frac{5}{6} \ si \ 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{6} \ si \ 1 \leq t \leq 2 \\ 0 \ \ si \ t \geq 1 \end{cases}$$

Cette fonction est bien positive, en intégrant sur chacun des intervalles on obtient bien $P(X < t)$ et l'intégrale de cette fonction sur R vaut bien 1 car :

$$\int_R f(x)\,dx = 0 + \left[\frac{5t}{6}\right]_0^1 + \left[\frac{t}{6}\right]_1^2 = \frac{5}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = 1$$

Question 2 : On cherche la médianne de X c'est dire on cherche $t \in R$ tel que $P(X < t) = \frac{1}{2}$. En regardant la fonction trouvée dans la question précédente on remarque que $\frac{1}{2}$ ne peut être atteint que sur $(0,1)$.

$$\frac{5t}{6} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \frac{6}{10}$$

Donc la médiane de X est $\frac{6}{10}$
Puis calculons l'espérance de X :

$$E(X) = \int_0^1 \frac{5t}{6}\,dt + \int_1^2 \frac{t}{6}\,dt = \left[\frac{5t^2}{12}\right]_0^1 + \left[\frac{t^2}{12}\right]_1^2 = \frac{2}{3}$$

Question 3 : Faisons une disjonction de cas selon l'issue du résultat du pile ou face.

Si pile se produit alors $X = U = (1+0)\cdot U$
Si face se produit alors $X = 2\cdot U = (1+1)\cdot U$
Donc si Y représente le lancer de la pièce, c'est à dire $Y = 0$ si pile se produit et $Y = 1$ si face se produit, alors Y suit une loi de Bernouilli de paramètre $1-p$.
Donc $X = (1+Y)\cdot U$ et comme le lancer de la pièce et U sont indépendant U et Y le sont aussi.
Puis comme U et Y sont indépendante :

$$E(X) = E((1+Y)\cdot U) = E(1+Y)\cdot E(U) = (1+1-p)\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

Exercice 2

Question 1 : On cherche de nouveau la fonction de répartition :

$$F(t) = P(X < t) = P(\sqrt{U} < t) = \begin{cases} 0 \;\; si\ t \le 0 \\ t^2 \;\; si\ 0 \le t \le 1 \\ 1 \;\; si\ t \ge 1 \end{cases}$$

On en déduit donc la fonction de densité de X :

$$f : x \mapsto = \begin{cases} 0 \quad si\ t \leq 0 \\ 2t\ si\ 0 \leq t \leq 1 \\ 0 \quad si\ t \geq 1 \end{cases}$$

Cette fonction est bien la fonction de densité de X car elle est positive en intégrant on retrouve bien la fonction de répartiton de X et son intégrale sur R vaut bien 1 car :

$$\int_0^1 2t\,dt = \left[t^2\right]_0^1 = 1$$

Utilisons la fonction de densité de X :

$$E(X) = \int_R t \cdot f(t)\,dt = \int_0^1 2t^2\,dt = \left[\frac{2t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

<u>Question 2</u> : Utilisons le théorème de transfert :

$$E(X) = E(\sqrt{U}) = \int_R \sqrt{t} \cdot 1_{[0,1]} = \left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

Comme X est une variable aléatoire positive on a :

$$E(X) = \int_R 1 - F(t)\,dt = \int_0^1 (1 - t^2)\,dt = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

<u>Question 3</u> : En utilisant le théorème de König-Huygens on obtient:

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(U) - (E(X))^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$$

Exercice 3

1) Calculons, $\forall t \in R_+$,$P(X > t)$

$P(X > t) = P(\bigcup_{i=1}^n X_i > t) = \prod_{i=1}^n P(X_i > t)$ Par indépendance des variables X_i

Or, chaques X_i suis une loi exponentielle de même paramètre de même fonction de répartition F.

$\prod_{i=1}^n P(X_i > t) = \prod_{i=1}^n 1 - F(t) = \prod_{i=1}^n 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = \prod_{i=1}^n e^{-\lambda t} = e^{-\lambda n t}$

D'où : $P(X > t) = e^{-\lambda n t}$

2) Notons F_X la fonction de répartition de X. Soit t $\in R$, si $t \in [-\infty; 0]$:

$F_X(t) = P(X < t) = 0$ car X est une variable aléatoire à valeures dans $[0; \infty]$

Si $t \in [0; \infty]$: $F_X(t) = P(X < t) = 1 - P(X > t) = 1 - e^{-\lambda n t}$
En notant $f_X(t)$ la fonction de densité de X, on obtient en dérivant la fonction précédente :

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & si\ t < 0 \\ \frac{1}{n\lambda} e^{-n\lambda t} & sinon \end{cases}$$

On reconnais une loi exponentielle de paramètre n λ
Selon le cours, son espérence est alors de $\frac{1}{n\lambda}$