Compte Rendu TD8

Le Maner Corentin, Legrand Mathieu, Mellot Arthur et Benarous Sami - Groupe 3

Exercice 1

Soient (U_n) et (V_n) deux suites de variables aléatoires de loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. On suppose que ces variables aléatoires sont indépendantes dans leur ensemble. On pose

$$\forall n \geq 1, \quad \begin{cases} X_n = 1 & \text{si } U_n^2 + V_n^2 \leq 1 \\ \quad\ \ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et $Z_n = 4(X_1 + \cdots + X_n)/n$

Question 1

- Déterminer la loi de la variable X_n.
- Calculer la variance de Z_n et montrer que la suite (Z_n) converge vers π.

Réponse :

- $U_n \in [0,1]$ et $V_n \in [0,1]$. Comme $X_n = 1$ si $U_n^2 + V_n^2 \leq 1$ on a :
  $P(X_n = 1) = \frac{\pi}{4}$
  $P(X_n = 0) = 1 - P(X_n = 1) = \frac{3\pi}{4}$

$$\begin{aligned} V(Z_n) &= V(\frac{4(X_1 + ... + X_n)}{n}) \\ &= V(\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) \\ &= \frac{16}{n^2} \times \sum_{i=1}^{n} V(X_i) \\ &= \frac{16}{n} V(X_1) \\ &= \frac{16}{n}(E(X_1^2) - E(X_1)^2) \\ &= \frac{16}{n}(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{16}) \\ &= \frac{\pi(4-\pi)}{n} \end{aligned}$$

- On applique la loi des grands nombres.

Les X_i sont des variables indépendantes de même loi et de carrés intégrables on a alors :
$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{1}{n}\sum_i^n X_i - E(X)| > \epsilon) = 0$
$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{Z_n}{4} - E(X)| > \epsilon) = 0$
Donc Z_n converge vers 4E(X) donc $\lim_{n\to\infty} Z_n = 4 \times \frac{\pi}{4} = \pi$

Question 2

Soit $\alpha \in (0,1)$ et $\epsilon > 0$.

- A l'aide de l'inégalité de Chebyshev, déterminer un entier n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad \mathrm{P}(|Z_n - \pi| > \epsilon) \leq \alpha$$

- Ecrire un algorithme qui retourne une valeur approchée de π à 10^{-4} près, avec une probabilité supérieure à 0.95.

Réponse :

- On a d'après l'inégalité de Chebyshev :

$\mathrm{P}(|Z_n - \mathbb{E}(Z_n)| > \epsilon) \leq \frac{V(Z_n)}{\epsilon^2}$

D'ou :

$\mathrm{P}(|Z_n - \pi| > \epsilon) \leq \frac{\pi(4-\pi)}{n\epsilon^2}$

Or,

$\frac{\pi(4-\pi)}{n\epsilon^2} \leq \alpha \Rightarrow n \geq \frac{\pi(4-\pi)}{\alpha\epsilon^2}$

D'ou n_0 est le plus petit entier supérieure ou égale à $\frac{\pi(4-\pi)}{\alpha\epsilon^2}$

- On cherche ici n_0 tel que $\forall n \geq n_0 \quad \mathrm{P}(|Z_n - \pi| \leq 10^{-4}) > 0.95$

Or :

$\mathrm{P}(|Z_n - \pi| \leq 10^{-4}) > 0.95 \Leftrightarrow 1 - \mathrm{P}(|Z_n - \pi| \leq 10^{-4}) \leq 0.05 \Leftrightarrow \mathrm{P}(|Z_n - \pi| > 10^{-4}) \leq 0.05$

Cette valeur est alors atteinte pour $n \geq 5393532426.54$ soit $n_0 = 5393532427$

Ainsi on peut proposer l'algorithme suivant :

Z = 0

Pour i de 1 à n_0 faire :

  Tirer $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(\frac{\pi}{4})$

  Z = Z + X

Fin Pour

Renvoyer $\frac{4Z}{n_0}$

Question 3

On multiplie la variable Z_n par $\sqrt{n}$.

- Calculer la variance de la variable $\sqrt{n}(Z_n - \pi)$. Cette variance converge-t-elle vers 0 ? Vers une constante ?
- Quelle loi connue fournit une bonne approximation de la loi de $\sqrt{n}(Z_n - \pi)$?

Réponse :

$$Var(\sqrt{n}Z_n) = nVar(Z_n) = \pi(4-\pi)$$

La variance de $\sqrt{n}Z_n$ est donc constante pour tout n. Nous pouvons approximer cette loi avec la loi normale centrée en $E(\sqrt{n}Z_n)$ et de variance $Var(\sqrt{n}Z_n)$.

$E(\sqrt{n}Z_n) = \sqrt{n}E(Z_n) = \sqrt{n}\pi$

Finalement

$$Z_n \sim N(\sqrt{n}\pi, \pi(4-\pi))$$

Exercice 2

On considère une suite (U_n) de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $(0,1)$ et la fonction

$$\forall u \in (0,1), \quad \varphi(u) = \sqrt{(1-u)u^3}$$

Question 1

Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varphi(U_i)$$

- Montrer que la suite (Y_n) converge, au sens de la loi des grands nombres, vers la limite $\mathcal{I}$ définie ci-dessous

$$\mathcal{I} = \int_0^1 \varphi(u)du$$

On admettra que $\mathcal{I} = \frac{\pi}{16}$.

Réponse :

- On utilise la loi des grands nombres de la même manière que dans la méthode de Monte-Carlo vue en cours.

Les (U_i) sont des variables de carré intégrable, indépendantes et de même loi ayant pour densité $f_U = \mathbb{1}_{(0,1)}$ et de plus

$$\mathbb{E}[Y_n] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[\varphi(U_i)] = \mathbb{E}[\varphi(U_1)] = \int \varphi(u) f_U(u)du$$

On a donc grâce à la loi des grands nombres :

$$Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int \varphi(u) f_U(u)du = \int_0^1 \varphi(u)du = \mathcal{I}$$

Question 2

- Calculer la variance de la variable aléatoire Y_n.
- Soit $\epsilon = 10^{-3}$. A l'aide du théorème de Chebyshev, donner une estimation du rang n à partir duquel on peut considérer que

$$\mathrm{P}(|Y_n - \mathcal{I}| < \epsilon) \geq 0.95$$

Réponse :

- Les (U_i) sont des variables indépendantes, donc les $(\varphi(U_i))$ aussi, donc :

$$Var[Y_n] = \frac{1}{n^2} Var\left[\sum_{i=1}^{n} \varphi(U_i)\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var[\varphi(U_i)]$$

où pour tout i, $Var[\varphi(U_i)] = \mathbb{E}[(1-U_i)U_i^3] - \mathbb{E}[\varphi(U_i)]^2$.

On sait que pour tout i, $\mathbb{E}[\varphi(U_i)] = \int_0^1 \varphi(u)du = \mathcal{I} = \frac{\pi}{16}$ et donc $\mathbb{E}[\varphi(U_i)]^2 = \frac{\pi^2}{256}$.

et de plus $\mathbb{E}[(1-U_i)U_i^3] = \int_0^1 (1-u)u^3 du = \int_0^1 u^3 du - \int_0^1 u^4 du = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$

Ainsi

$$Var[Y_n] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{20} - \frac{\pi^2}{256}\right) = \frac{64-5\pi^2}{1280n} \approx \frac{11,45 \cdot 10^{-3}}{n}$$

- D'après l'inégalité de Chebyshev, comme $\mathbb{E}[Y_n] = \mathcal{I}$:

Pour tout $\epsilon > 0$ et $n \geq 1$,

$$P\left(|Y_n - \mathcal{I}| \geq \epsilon\right) \leq \frac{Var[Y_n]}{\epsilon^2}$$

Or $P\left(|Y_n - \mathcal{I}| < \epsilon\right) = 1 - P\left(|Y_n - \mathcal{I}| \geq \epsilon\right)$ donc $P\left(|Y_n - \mathcal{I}| < \epsilon\right) \geq 1 - \frac{Var[Y_n]}{\epsilon^2}$.

Alors $P\left(|Y_n - \mathcal{I}| < \epsilon\right) \geq 0.95$ lorsque :

$$1 - \frac{64-5\pi^2}{1280\epsilon^2 n} \geq 0.95 \Leftrightarrow n \geq \frac{64-5\pi^2}{64\cdot 10^{-6}}$$

Comme $\frac{64-5\pi^2}{64\cdot 10^{-6}} \approx 228938$, on a donc le résultat attendu à partir de

$$n = 228938$$

Question 3

On considère la loi de densité f définie sur l'intervalle $(0,1)$ de la manière suivante

$$\forall v \in (0,1), \quad f(v) = 6v(1-v)$$

Soit (V_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, de loi de densité f. Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi(V_i)}{f(V_i)}.$$

- Montrer que la suite Z_n converge vers $\mathcal{I}$.
- Comparer la variance de la variable aléatoire Z_n à celle de la variable Y_n.

Réponse :

- Comme pour la méthode d'échantillonnage préférentiel disponible dans le cours :

$$Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi(V_i)}{f(V_i)} \mathbb{1}_{(0,1)}(V_i) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int \varphi(v)\cdot \mathbb{1}_{(0,1)}(v)dv = \mathcal{I}$$

$$Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathcal{I}$$

- Les (V_i) sont des variables indépendantes, donc les $(\frac{\varphi(V_i)}{f(V_i)})$ aussi, donc :

$$Var[Z_n] = \frac{1}{n^2} Var\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi(V_i)}{f(V_i)}\right] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} Var\left[\frac{\varphi(V_i)}{f(V_i)}\right]$$

où pour tout i, $Var\left[\frac{\varphi(V_i)}{f(V_i)}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{\varphi(V_i)^2}{f(V_i)^2}\right] - \mathbb{E}\left[\frac{\varphi(V_i)}{f(V_i)}\right]^2$

or pour tout i, $\mathbb{E}\left[\frac{\varphi(V_i)}{f(V_i)}\right] = \int_0^1 \frac{\varphi(v)}{f(v)} f(v)dv = \mathcal{I}$ et donc $\mathbb{E}\left[\frac{\varphi(V_i)}{f(V_i)}\right]^2 = \frac{\pi^2}{256}$

et de plus $\mathbb{E}\left[\frac{\varphi(V_i)^2}{f(V_i)^2}\right] = \int_0^1 \frac{\varphi(v)^2}{f(v)} dv = \int_0^1 \frac{(1-v)v^3}{6(1-v)v} dv = \frac{1}{6}\int_0^1 v^2 dv = \frac{1}{18}$

Ainsi

$$Var[Z_n] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{18} - \frac{\pi^2}{256}\right) = \frac{128 - 9\pi^2}{2304n} \approx \frac{17,00 \cdot 10^{-3}}{n}$$

Donc pour tout $n \geq 1$,

$$Var[Z_n] \geq Var[Y_n]$$

.

Question 4

- Proposer deux algorithmes de calcul de l'intégrale $\mathcal{I}$ s'appuyant sur les questions précédentes.
- Lequel vous semble le plus précis des deux pour n appels du générateur aléatoire ? Justifier.

Réponse : L'algorithme utilisant la suite (Y_n) sera plus précis car la variance des Y_n est plus faible que celle des Z_n.

Question 5

Soit $1 \leq \alpha \leq 3$. On considère désormais que f appartient à la famille de densités f_α définies sur l'intervalle $[0, 1]$ de la manière suivante

$$\forall v \in (0, 1), \quad f_\alpha(v) = c_\alpha v^\alpha (1 - v)$$

Loi $\mathcal{B}(\alpha + 1, 2)$

- Montrer (ou admettre) que la constante c_α est égale à $(\alpha + 2)(\alpha + 1)$.
- A quel choix de α correspond l'algorithme de calcul de $\mathcal{I}$ le plus précis ?
- La précision est-elle supérieure à celle de l'algorithme s'appuyant sur la question 1 ?

Réponse :

- Pour que f_α soit une densité, il faut $\int_0^1 f_\alpha(v)dv = 1$. Or $\int_0^1 f_\alpha(v)dv = c_\alpha \left(\int_0^1 v^\alpha dv - \int_0^1 v^{\alpha+1} dv\right)$

d'où $c_\alpha = (\alpha + 2)(\alpha + 1)$.