Exercice 1

Question 1

Notons D_A et D_H les variables aléatoires modélisant respectivement les durées d'autonomie de d'Abdel et de Hanneke.

- $P := P(D_A < D_H) = P((D_A, D_H) \in \{(x,y) \in R_+^2, x < y\})$

Notons, $C := \{(x,y) \in R_+^2, x < y\}$.

Alors :

$$P = \int\int_C f(x,y)dxdy = \int_0^{+\infty}\int_x^{+\infty} f(x,y)dxdy$$

Par indépendance des variables aléatoires, on a :

$$P = \int_0^{+\infty}\int_x^{+\infty} f_{D_A}(x)f_{D_H}(y)dxdy = \int_0^{+\infty}\int_x^{+\infty} \lambda_A e^{-\lambda_A x}\lambda_H e^{-\lambda_H y}dxdy$$

D'où :

$$P = \int_0^{+\infty} \lambda_A e^{-\lambda_A x}\left[\frac{\lambda_H e^{-\lambda_H y}}{-\lambda_H}\right]_x^{\infty} dx = \int_0^{+\infty} \lambda_A e^{-(\lambda_A+\lambda_H)x}$$

Ainsi :

$$P = \left[\lambda_A \frac{e^{-(\lambda_A+\lambda_H)x}}{-(\lambda_A+\lambda_H)}\right]_0^{+\infty} = \frac{\lambda_A}{\lambda_A+\lambda_H}$$

Or, comme la durée d'autonomie de la batterie du portable d'Abdel est en moyenne 2.3 fois plus élevée que celle du portable de Hanneke, on a :

$$E(D_A) = 2.3E(D_H)$$

D'où : $\frac{1}{\lambda_A} = \frac{2.3}{\lambda_H}$ i.e. $\lambda_H = 2.3\lambda_A$

Finalement :

$$P = \frac{10}{33} \approx 0.30$$

Exercice 3

1) X et Y sont indépendantes donc $\forall(x,y) \in \mathbb{R}_+^2, f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \times f_Y(y) = e^{-x}2e^{-2y} = 2e^{-2y-x}$

2) $Z = X + Y$
   Soit $t \geq 0$:
   $P(Z \leq t) = P(X + Y \leq t) = P(X \leq t - Y)$
   $= \int_D f(x,y)dxdy$ avec $D = \left\{(x,y) \in [0,t]^2, x \leq t - y\right\}$
   $= \int_0^t \int_0^{y-t} 2e^{-x}dx\ e^{-2y}dy$
   $= 2\int_0^t \left[-e^{-x}\right]_0^{t-y}\ e^{-2y}dy$

$$= 2\int_0^t e^{-2y}(1-e^{y-t})dy$$
$$= 2\int_0^t e^{-2y}dy - 2\int_0^t e^{-y-t}dy$$
$$= 2\left[-\frac{e^{-2y}}{2}\right]_0^t - 2\left[-e^{-y-t}\right]_0^t$$
$$= 2\left(-\frac{e^{-2t}}{2}+\frac{1}{2}+e^{-2t}-e^{-t}\right)$$
$$= 1-2e^{-t}+e^{-2t} = (1-e^{-t})^2$$

De plus, on trouve :
$$E(X) = \int_0^{+\infty} xf_X(x)dx = \int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$$
$$= \left[-xe^{-x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = 1$$
$$E(Y) = \int_0^{+\infty} yf_Y(y)dy = \int_0^{+\infty} 2ye^{-2y}dy$$
$$= \left[-ye^{-2y}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-2y}dx = \left[-\frac{e^{-2y}}{2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$$

D'où $E(Z) = E(X+Y) = \dfrac{3}{2}$

3) $E(T) = E(XY) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} xy \times 2e^{-2y-x}dxdy = \int_0^{+\infty} 2ye^{-2y}\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx\ dy$
$$= \int_0^{+\infty} 2ye^{-2y}E(X)dy = E(X)\int_0^{+\infty} 2ye^{-2y}dy = E(X)E(Y) = \frac{1}{2}$$

Exercice 5

Question 1

1. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X>t)\,dt \\
&= \int_0^1 \mathbb{P}(X>t)\,dt \\
&= \int_0^1 (1-\mathbb{P}(X\le t))\,dt \\
&= 1-\int_0^1 \mathbb{P}(U\le t, V\le t)\,dt \\
&= 1-\int_0^1 \mathbb{P}(U\le t)\cdot\mathbb{P}(V\le t)\,dt \quad \text{(par indépendance de } U \text{ et } V\text{)} \\
&= 1-\int_0^1 t^2\,dt \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Y > t)\, dt \\
&= \int_0^{1} \mathbb{P}(Y > t)\, dt \\
&= \int_0^{1} \mathbb{P}(U > t, V > t)\, dt \\
&= \int_0^{1} \mathbb{P}(U > t) \cdot \mathbb{P}(V > t)\, dt \quad (\text{par indépendance de } U \text{ et } V) \\
&= \int_0^{1} (1-t)^2\, dt \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Et comme $XY = UV$, et par indépendance de U et V alors : $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(U) \cdot \mathbb{E}(V) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Donc : $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{36}$

D'où X et Y ne sont pas indépendantes.

Question 2

- D'après la formule des probabilités totales :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}((X, Y) \in B) &= \mathbb{P}((X, Y) \in B | U < V)) \cdot \mathbb{P}(U < V) + \mathbb{P}((X, Y) \in B | U \geq V)) \cdot \mathbb{P}(U \geq V) \\
&= \mathbb{P}((U, V) \in B) \cdot \mathbb{P}(U < V) + \mathbb{P}((V, U) \in B)) \cdot \mathbb{P}(U \geq V)
\end{aligned}
$$

Par symetrie des roles de U et V, on a : $\mathbb{P}((U, V) \in B) = \mathbb{P}((V, U) \in B)$ et $\mathbb{P}(U < V) = \mathbb{P}(V < U)$

Donc : $\mathbb{P}(U < V) = \mathbb{P}(U \geq V) = \frac{1}{2}$

Ainsi : $\mathbb{P}((X, Y) \in B) = \mathbb{P}((U, V) \in B)$

Il s'en suit que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}((X,Y) \in B) &= \iint\limits_B f_{U,V}(x,y)\,dx\,dy \\
&= \iint\limits_B f_U(x) \cdot f_V(y)\,dx\,dy \quad \text{(par indépendance de } U \text{ et } V\text{)} \\
&= \iint\limits_B \mathbf{1}_{[0,1]}(x)\mathbf{1}_{[0,1]}(y)\,dx\,dy \\
&= \iint\limits_B \mathbf{1}_{(x,y)\in[0,1]^2}\,dx\,dy \\
&= \iint\limits_B (\mathbf{1}_{0\leq x\leq y\leq 1} + \mathbf{1}_{0\leq y<x\leq 1})\,dx\,dy \\
&= \iint\limits_B \mathbf{1}_{0\leq x\leq y\leq 1}\,dx\,dy + \iint\limits_B \mathbf{1}_{0\leq y<x\leq 1}\,dx\,dy \\
&= \iint\limits_B \mathbf{1}_{0<x<y<1}\,dx\,dy + \iint\limits_B \mathbf{1}_{0<y<x<1}\,dx\,dy \quad \text{(car } U \text{ et } V \text{ sont des variables aléatoires contiunes)} \\
&= 2\iint\limits_B \mathbf{1}_{0<u<v<1}\,du\,dv
\end{aligned}$$

- En posant : $f(x,y) = 2 \times \mathbf{1}_D(x,y)$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/0 < x < y < 1\}$, on a bien :

$$\mathbb{P}((X,Y) \in B) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy &= 2\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_D(x,y)\,dx\,dy \\
&= 2\iint\limits_{0<x<y<1} dx\,dy \\
&= 2\int_0^1 \int_0^y dx\,dy \\
&= 2\int_0^1 y\,dy \\
&= 1
\end{aligned}$$

Donc f est bien une desnité et c'est la densité jointe du couple de variables aléatoires (X,Y).

Question 3

On a :

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_0^1 f(x;y)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 2 \times \mathbf{1}_{\{0<x<y<1\}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^y 2\,\mathrm{d}x \\ &= 2y \end{aligned} \tag{1}$$

De plus, pour $x \in [0;y]$, on a :

$$\begin{aligned} f_{X|Y=y}(x) &= \frac{f(x;y)}{f_Y(y)} \\ &= \frac{2 \times \mathbf{1}_D(x;y)}{2y} \\ &= \frac{\mathbf{1}_D(x;y)}{y} \\ &= \frac{1}{y} \end{aligned} \tag{2}$$

En effet, on a $\mathbf{1}_D(x;y)$ car $x \in [0;y]$.

Ainsi, la loi conditionnelle de X sachant $Y = y$ est uniforme sur $[0;y]$.

De plus, $\sqrt{V}$ a la même loi que Y.

En effet, pour $y \in [0;1]$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\sqrt{V} \leq y) &= \mathbb{P}(V \leq y^2) \\ &= y^2 \end{aligned} \tag{3}$$

On rappelle que $V \sim \mathcal{U}([0;1])$.

D'où,

$$\begin{aligned} f_{\sqrt{V}}(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\mathbb{P}(\sqrt{V} \leq y) \\ &= 2y \end{aligned} \tag{4}$$

Pour $y \in [0;1]$ fixé, $U\sqrt{V} \mid \sqrt{V} = y \sim \mathcal{U}([0;y])$ car

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(U\sqrt{V} \mid \sqrt{V} = y) &= \mathbb{P}(U \in [0;\frac{x}{y}]) \\ &= \frac{x}{y} \end{aligned} \tag{5}$$

Par le lemme des coalitions, $U\sqrt{V}$ et $\sqrt{V}$ sont indépendantes.

On en déduit le résultat demandé.

Question 4

Les couples $(X;Y)$ et $(U\sqrt{V};\sqrt{V})$ ont la même loi.

Ainsi, $X+Y$ et $U\sqrt{V}+\sqrt{V}=\sqrt{V}(U+1)$ ont la même loi.

Cependant, on a toujours $X+Y=U+V$.

Donc, $U+V$ et $U\sqrt{V}+\sqrt{V}=\sqrt{V}(U+1)$ ont la même loi.