Institut National Polytechnique de Grenoble

ENSIMAG

PRÉCIS de MATHÉMATIQUES

ÉLÉMENTS DE COURS ET PETIT PRÉCIS ET RAPPELS INDISPENSABLES

ANNÉE 2007

Maryse BÉGUIN

Maryse.Beguin@imag.fr

Introduction

Ce petit polycopié n'ambitionne pas d'être ou de remplacer un livre de mathématiques à proprement parlé. Il est destiné aux élèves d'écoles ingénieurs ayant quelques difficultés en mathématiques afin de combler leurs principales lacunes. Cette aide ne remplace pas un cours plus approfondi mais permet aux étudiants d'avoir des repères rapides et accessibles sur les notions qui pourraient leur faire le plus défaut en abordant la première année d'une école d'ingénieurs. Toutes les démonstrations ne sont pas données, seules celles qui sont génériques et/ou présentent un intérêt sont fournies. Ce document constitue donc seulement une aide et donne un aperçu des connaissances mathématiques souvent indispensables à un cursus ingénieur. Quelques rappels sont élémentaires car l'expérience m'a appris qu'il manquait juste un peu de vocabulaire aux étudiants venant d'autres horizons que les classes préparatoires pour comprendre. D'autres chapitres, en particulier ceux de la fin, sont un peu plus conséquents et d'un niveau plus approfondi.

`En savoir plus, faire des exercices:`
`http://www.sciences-en-ligne.com/momo/chronomath/accueil.htm`

Chapitre 1

Rappels utiles de notations, de définitions et de logique

1.1 Les O, o et ϵ en bref

Ces notations permettent des échelles de comparaison entre fonctions ou suites et permettent grâce à cette notation conventionnelle d'exprimer des notions assez simples.

La notation O

On note

$$f =_{t_o} O(g) \Leftrightarrow \exists\ k \in \mathbb{R}, \exists\ U \in \mathcal{V}(t_o) \mid \forall t \in U, |f(t)| \leq k|g(t)| \quad ,$$

Autrement dit, $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de t_0.
La notation o

On note

$$f =_{t_o} o(g) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists\ U \in \mathcal{V}(t_o) \mid \forall t \in U, |f(t)| \leq \epsilon|g(t)| \quad ,$$

Autrement dit, $\frac{f}{g}$ a pour limite 0 au voisinage de t_0.

La notation ϵ

On note

$$f =_{t_o} \epsilon \Leftrightarrow \lim_{t_0} \epsilon(t) = 0 \quad ,$$

Autrement dit, f a pour limite 0 au voisinage de t_0.

1.2 Les morphismes en bref

Beaucoup d'étudiants font quelques confusions entre les différents "isme" utiliés dans d'autres cours de maths. Cette section a juste pour vocation de refaire le point sur les différentes définitions, mais n'a pas l'ambition de couvrir leur utilité.

Définition 1 *Soit* $(E, +_E, \lambda_E)$ *un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*, noté pour simplifier* K*.*
Soit $(F, +_F, \lambda_F)$ *un espace vectoriel sur* K *et soit* $f : E \to F$*.*
On dit que f *est un homomorphisme ou une application linéaire, ssi :*

$$\forall (x,y) \in E^2, \forall \lambda \in K, \forall \mu \in K, \; f(\lambda._E x +_E \mu._E y) = \lambda._F f(x) +_F \mu._F f(y) \; .$$

Ces notations sont un peu lourdes mais rappellent sur quels espaces sont effectuées les opérations.

Définition 2 *Un isomorphisme de* E *sur* F *est un homomorphisme bijectif*

Définition 3 *Un endomorphisme de* E *est un homomorphisme de* E *dans* E*.*

Définition 4 *Un automorphisme de* E *est un isomorphisme de* E *dans* E*.*

Définition 5 *Soient* E *et* F *deux espaces métriques. Un homéomorphisme de* E *sur* F *est une bijection continue de* E *sur* F *dont la réciproque est continue.*

Définition 6 *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels normés sur* $\mathbb{R}$*. Soit* U *un ouvert de* E *et* V *un ouvert de* F*. Un difféomorphisme de classe* C^k *de* U *sur* V *est une bijection de classe* C^k *de* U *sur* V*, dont la réciproque est aussi de classe* C^k*.*

1.3 Qu'est-ce qu'une démonstration??

Une démonstration est la preuve d'une proposition dont on démontre la valeur vraie grâce aux règles de logique des prédicats.

1.3.1 Quelques rappels de logique

Les bases essentielles de la logique des prédicats reposent sur les règles du "et" du "ou" , et de l'implication ($\Rightarrow$) dont les tableaux de vérité sont rappelés ci après:
Le "et"

p	q	p et q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Le "ou"

p	q	p ou q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

L'implication, $\Rightarrow$

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Il est aisé de montrer que $(p \Rightarrow q)$ a la même valeur de vérité que (non$p$ ou q).
Une conclusion importante est de pouvoir démontrer qu'une implication $(p \Rightarrow q)$ est fausse. La proposition non(non p ou q) a en effet même table de vérité que (p et non q).
Autrement dit, une implication $p \Rightarrow q$ est fausse si je peux exhiber un exemple pour lequel p est vrai et q est faux.
Une équivalence $(p \Leftrightarrow q)$ a donc pour table de vérité : (non p ou q) et (non q ou p) soit

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Pour montrer une équivalence entre deux prédicats, il faut donc montrer $p \Rightarrow q$ et $q \Rightarrow p$.
On peut y parvenir soit directement, soit en passant de l'énoncé p à l'énoncé q grâce à des règles connues ou à des prédicats déjà démontrés.
On peut y parvenir par la "contraposée ". Cette méthode repose sur la tautologie suivante.
$p \Rightarrow q$ a même table de vérité que non q $\Rightarrow$ non p . En effet,$p \Rightarrow q$ signifie non p ou q et non q $\Rightarrow$ non p signifie q ou non p. Or la table du ou est commutative. Ainsi, lorsque la démonstration directe s'avère difficile, on peut parfois y parvenir plus facilement en montrant (non q $\Rightarrow$ non$p$).
On peut parfois y parvenir en le montrant par l'absurde :
En supposant $(p \Rightarrow q)$ faux, cela signifie (p et non q) vrai et on cherche alors à montrer que l'on obtient une contradiction avec l'hypothèse.

1.3.2 Exemple de démonstration de par récurrence

La démonstration par récurrence est utile pour démontrer qu'une propriété est vraie pour tous les entiers n à partir d'un rang n_0. En toute logique il faudrait pour cela la montrer pour chacun des entiers à partir d'un rang n_0 et il y aurait donc une infinité de démonstrations à faire.
La construction et les axiomes de $\mathbb{N}$ permettent de pallier à cette difficulté en démontrant

cette propriété de la manière suivante:
Soit $P(n)$ la propriété qui dépend de n et dont on souhaite prouver la valeur vraie à partir d'un rang n_0. Il suffit de montrer deux choses :

1. $P(n_0)$ est vraie
2. $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie

Autrement dit, nous ne démontrons pas que $P(n)$ est vraie, mais si on suppose que $P(n)$ est vraie, alors l'implication $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie.
Ces deux démonstrations $P(n_0)$ est vraie et $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie permettent d'utiliser une caractéristique de $\mathbb{N}$ et d'en déduire que :

$$\forall\, n \ \geq n_0 \ , P(n) \text{ est vraie.}$$

Exemple : Montrer que

$$\forall n \ \in \ \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Soit $P(n)$ cette propriété.

- $P(1)$ est vraie : En effet, le membre de gauche de l'égalité vaut 1, celui de droite vaut 1 aussi.
- Supposons $P(n)$ vraie et calculons $S = \sum_{k=1}^{n+1} k^2$. On a :

$$S = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \quad \text{(par associativité de } \mathbb{N}\text{)}$$

$$S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \text{ , (par hyp. de récurrence)}$$

d'où

$$S = \frac{(n+1)}{6} \left(n(2n+1) + 6(n+1)\right) \text{ , (par distributivité de } \mathbb{N}\text{)}$$

$$S = \frac{(n+1)}{6} \left(2n^2 + 7n + 6\right) \ ,$$

Or $2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2n+3)$. Donc

$$S = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \ .$$

Donc $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie.

D'après les caractéristiques de $\mathbb{N}$, cette propriété est donc vraie $\forall n \geq 1$. ■

Chapitre 2

Rappels sur des notions d'analyse

2.1 Éléments à savoir sur $\mathbb{R}$

La problématique qui conduit à la construction de $\mathbb{R}$ est la suivante: Toute suite déléments de $\mathbb{Q}$ a t-elle une limite dans $\mathbb{Q}$??? Cette problématique conduit à la théorie de la convergence puis à la construction et aux propriétés de $\mathbb{R}$.

Définition 7 *On appelle suite à valeurs dans un ensemble E, une application de*
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & E \\ n & \mapsto & u_n \end{array}$$
On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
Autrement dit, une suite est un ensemble de points de E, ordonnancé, ou étiqueté par $\mathbb{N}$. Dans la pratique, $E = \mathbb{Q}$ ou $E = \mathbb{R}$. Le problème est en général de déterminer le comportement de cet ensemble de points quand n devient très grand, voire infini.

Définition 8 *Une suite à valeurs dans K ($= \mathbb{Q}$,$\mathbb{R}$,$\mathbb{C}$) admet une limite l ssi*

$$\forall \, \epsilon \ \in K_+^*, \exists \, N \ \in \mathbb{N} \; tq \; \forall \, n \geq N \ , \ |u_n - l| < \epsilon \ .$$

Autrement dit, à partir d'un certain rang, l'écart entre la suite et la limite l peut être rendu aussi petit que l'on veut. La suite est dite convergente.
Malheureusement, dans la pratique, déterminer qu'une suite converge et déterminer sa limite n'est pas chose aisée. Il faut donc avoir recours à d'autres critères pour caractériser le comportement d'une suite.

Définition 9 *La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans K est une suite de Cauchy ssi*

$$\forall \, \epsilon \ \in K_+^* \ , \exists \, N \ \in \mathbb{N} \mid \forall \, p \geq N \ , \forall \, q \geq N \ |u_p - u_q| < \epsilon \ .$$

Autrement dit, à partir d'un certain rang, l'écart entre deux termes de la suite peut être rendu aussi petit que l'on veut.
Il est aisé de montrer qu'une suite convergente est une suite de Cauchy. La question qui se pose est de savoir si une suite de Cauchy converge, ce qui paraitrait intuitif. Curieusement

et contrairement à l'intuition, on peut montrer qu'une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ ne converge pas dans $\mathbb{Q}$.

Démonstration

Soit $u_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$. Alors, $u_n \in \mathbb{Q}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Cauchy. En effet, soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, avec $p < q$. Alors:

$$u_q - u_p = \frac{1}{q!} + \frac{1}{(q+1)!} + \ldots + \frac{1}{(p+2)!} + \frac{1}{(p+1)!} \quad ,$$

$$u_q - u_p \leq \frac{1}{(p+1)!}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{(q-p-1)}}\right) \quad ,$$

$$u_q - u_p \leq \frac{1}{(p+1)!}\frac{1}{(1-1/2)} \quad ,$$

$$u_q - u_p \leq \frac{2}{(p+1)!} \quad .$$

Or, pour p suffisamment grand, $\frac{2}{(p+1)!}$ est aussi petit que l'on veut dans $\mathbb{Q}$. Donc :

$$\forall \epsilon \in \mathbb{Q}_+^*, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall p \geq N, \forall q \geq N \; |u_p - u_q| < \epsilon \, .$$

Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy.
Supposons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{Q}$ vers $l = r/s$, où $r \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{N}$. De $0 \leq u_q - u_p < \frac{2}{(p+1)!}$, on déduit pour p assez grand, $0 \leq l - u_p < \frac{2}{(p+1)!}$. Par réduction au même dénominateur, on peut poser

$$u_p = \frac{x_p}{p!} \text{ où } x_p \in \mathbb{N} \quad .$$

d'où,

$$0 \leq \frac{r}{s} - \frac{x_p}{p!} \leq \frac{2}{(p+1)!} \quad ,$$

d'où,

$$0 \leq rp! - sx_p \leq \frac{2s}{(p+1)} \quad ,$$

or $rp! - sx_p \in \mathbb{N}$, et $\frac{2s}{(p+1)}$ peut être rendu aussi petit que l'on veut et en particuler strictement plus petit que 1.
Donc un entier serait compris entre 0 et strictement plus petit que 1. Donc $rp! - sx_p = 0$ pour p grand ce qui implique que à partir d'un certain rang p_0, u_p serait constant, ce qui est absurde. Donc l n'est pas dans $\mathbb{Q}$. ■

Cette constation amène à poser la définition suivante :

Définition 10 *Un ensemble est complet ssi toute suite de Cauchy converge dans cet ensemble.*

Nous venons donc de montrer que $\mathbb{Q}$ n'est pas complet.
Sans détailler toute la construction rigoureuse de $\mathbb{R}$, l'idée assez naturelle est de "rajouter" à $\mathbb{Q}$ toutes les limites de suite de Cauchy de $\mathbb{Q}$ et de construire ainsi un ensemble qui contient $\mathbb{Q}$ et qui s'appelle $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathbb{R}$ ainsi construit est le "complété" de $\mathbb{Q}$ et "hérite" des opérations et des propriétés de $\mathbb{Q}$.

Théorème 1 $\mathbb{R}$ *est un corps commutatif, totalement ordonné, complet et archimédien.*

Théorème 2 $\mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$

Ceci signifie que dans tout intervallle borné par des réels, on peut trouver un rationnel et que tout réel est limite d'une suite croissante (resp. décroissante) de rationnels. Ce théorème vient directement de la construction de $\mathbb{R}$ mais est d'une importance capitale car son utilisation est une technique classique et générique de démonstrations de propriétés mathématiques.

Applications: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y)$.
1) En déduire $\forall\, \alpha \in \mathbb{Q}, f(\alpha x) = \alpha f(x)$.
2) On suppose maintenant f croissante. Montrer : $\forall\, a \in \mathbb{R}, f(ax) = af(x)$.
Démonstration

1) De $f(x+y) = f(x) + f(y)$, on déduit : $f(0) = 0$, puis $f(-x) = -f(x)$.
Par récurrence, on montre alors aisément $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $f(nx) = nf(x)$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $f(-nx) = -nf(x)$
Donc $\forall\, z \in \mathbb{Z}, \forall\, x \in \mathbb{R}\ \ f(zx) = zf(x)$.
Posons $y = \frac{px}{q}$, avec $q \in \mathbb{N}^*$. On a $f(qy) = qf(y)$.
D'où $f(q\frac{px}{q}) = qf(\frac{px}{q}) = f(px) = pf(x)$.
D'où $f(\frac{px}{q}) = \frac{p}{q}f(x)$.
2) Soit $a \in \mathbb{R}$. Il existe deux suites de rationnels respectivement croissante $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et décroissante $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers a. Alors:
$\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $r_n >< a < s_n$.
Soit x positif, on a alors : $r_n x < ax < s_n x$. Or f est croissante, donc : $f(r_n x) < f(ax) < f(s_n x)$.
D'où : $r_n f(x) < f(ax) < s_n f(x)$.
Et par passage à la limite,
$af(x) \leq f(ax) \leq af(x)$.
Donc $f(ax) = af(x)$.
Le même raisonnement conduit au résultat pour $x < 0$.
Donc, $\forall\, a \in \mathbb{R}, f(ax) = af(x)$. ■

Dans ce cas particulier, les suites $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites dites adjaçentes. Ces suites vérifient des proriétés particulières et sont souvent très utiles.

Définition 11 *Deux suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont dites adjaçentes ssi*

– $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante,*

- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante,*
- $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$,
- $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

Théorème 3 *Deux suites adjaçentes convergent et ont même limite.*
L'utilisation de ce théorème est une technique classique pour prouver la convergence d'une suite. Ce fut, par exemple, la technique utilisée par les grecs pour obtenir la valeur de π.
Application :

- $u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Montrons que cette suite converge:
  Posons $a_n = u_{2n}$ et $b_n = u_{2n+1}$.
  Alors $a_{n+1} - a_n = u_{2(n+1)} - u_{2n} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0$.
  $b_{n+1} - b_n = u_{2n+3} - u_{2n+1} = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+2} < 0$.
  $b_n = a_n + \frac{1}{2n+1}$, donc
  $a_n < b_n$ et $\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$.
  Donc (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont deux suites adjaçentes qui convergent vers la même limite, et par suite, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

- $u_n = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$, $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$.
  Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites adjaçentes. **Démonstration**

  Les propriétés 1,3 et 4 sont immédiates. De plus : $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = -\frac{1}{n!} < 0$. ■

  Leur limite commune est le nombre irrationnel e.

$\mathbb{R}$ ainsi construit a des propriétés particulières dont l'une des plus fondamentales est la suivante :

Théorème 4 *Toute partie non vide et majorée (resp minorée) de* $\mathbb{R}$ *admet une borne supérieure (resp une borne inférieure).*
Rappel : la borne supérieure de A est le plus petit des majorants de A.
Ce théorème est souvent utilisé dans différents domaines des mathématiques et permet, entre autres, de prouver le théorème suivant :

Théorème 5 *Toute suite croissante et majorée de* $\mathbb{R}$ *converge (resp décroissante et minorée).*
Démonstration

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante et majorée.
Posons $A = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Alors A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.
Soit l sa borne supérieure.
Soit $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Puisque $l - \epsilon$ n'est pas la borne supérieure, cela signifie :
$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \mid l - \epsilon < u_{n_0} \leq l$.
Or, la suite est croissante, majorée par l. Donc $\forall\, n \geq n_0$, $l - \epsilon < u_{n_0} \leq u_n \leq l$.
Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$. ■

Corollaire 1 *Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.*
De ces théorèmes, on "intuite" le théorème suivant :

Théorème 6 *De toute suite bornée de réels, on peut extraire une sous suite convergente.*
La démonstration rigoureuse est complexe à cause des notations. L'idée est de construire une sous suite monotone qui, étant bornée, converge.
Les suites convergentes ont des propriétés intéressantes. L'une d'elles, utilisée parfois en probabilité, est la suivante :

Théorème 7 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite l. Alors:*

$$\frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n} \mapsto_{n\to+\infty} l \quad .$$

Ce théorème porte le nom de théorème de Cesaro.

2.2 Quelques éléments à savoir sur les suites

2.2.1 Suites arithmétiques

Elles sont définies par :

$$u_{n+1} = u_n + r \text{ . On a } u_n = \frac{u_{n+1} + u_{n-1}}{2} \quad .$$

Soit S_n la somme de termes consécutifs de cette suite. On montre que

$$S_n = \left(\frac{\text{premier terme + dernier terme}}{2}\right) (\text{nombre de termes}) \quad .$$

2.2.2 Suites géométriques

Elles sont définies par :

$$u_{n+1} = qu_n \text{ . On a } u_n^2 = u_{n+1}u_{n-1} \quad \text{et } u_n = q^n u_0 = q^{n-1}u_1 \quad .$$

Soit S_n la somme de termes consécutifs de cette suite. On montre que

$$S_n = \left(\frac{\text{premier terme - q dernier terme}}{1-q}\right) \quad .$$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ssi $|q| < 1$ et de même $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ssi $|q| < 1$.

2.2.3 Suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

Si la suite converge et si f est continue en l alors, $l = f(l)$.
Dans la pratique, on utilise le théorème suivant :

Théorème 8 *Soit* $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ *et* f *telle que*

1. $I \subset \mathrm{D}_f$, $f(I) \subset I$,
2. f *dérivable sur* I *et* $\exists\, k \in]0,1[\mid \forall\, x \in I\,,\, |f'(x)| \leq k$

Alors,

1. *l'équation* $f(x) = x$ *admet une unique solution* l *dans* I.
2. $\forall\, \alpha \in I$, *la suite définie par* $u_0 = \alpha$ *et* $u_{n+1} = f(u_n)$ *converge vers* l.

2.2.4 Relation linéaire du premier ordre

La suite est définie par $u_{n+1} = \lambda u_n$. Soit S l'ensemble des solutions. Alors,
$S = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}}\,,\, u_n = A\lambda^n\}$, où A est définie par les conditions initiales.

Exemple: La population d'une culture bactérienne dans une boite de Petri double toutes les 40 minutes. Si à une date t_n la population est de u_n, à la date $t_{n+1} = t_n + 40$, la population est de $u_{n+1} = 2u_n = 2^n u_0$.

2.2.5 Relation de récurrence affine

La suite est définie par $u_{n+1} = au_n + b$.
Si $a \neq 1$ il y a un unique point fixe $x_0 = \frac{b}{1-a}$.
D'où $u_n = x_0 + a^n(u_0 - x_0)$. Si $|a| < 1$ alors la suite converge vers x_0.
Si $a = 1$ on est ramené à une suite arithmétique de raison b.

2.2.6 Relation de récurrence linéaire du second ordre

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$. La suite est définie par (1) $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

Proposition 1 *L'ensemble des solutions est un espace vectoriel*

Théorème 9 *Soit* $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. *Il existe une et une seule solution de (1) vérifiant les données initiales* $u_0 = \alpha$, $u_1 = \beta$.

Théorème 10 *La suite* $u : n \mapsto \lambda^n$ *avec* $\lambda \neq 0$ *est solution de (1) ssi* λ *est racine de l'équation :*

$$\text{(E)}: \lambda^2 - a\lambda - b = 0 \quad .$$

L'équation (E) est appelée équation caractéristique de (1).

Soit Δ le discriminant de l'équation (E) et soit S l'ensemble des solutions de (1).

Théorème 11 – *Si $\Delta > 0$. Soit λ_1 et λ_2 les solutions dans $\mathbb{R}$ de (E).*
Alors,

$$S = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid u_n = A(\lambda_1)^n + B(\lambda_2)^n\} \text{ où } (A,B) \in \mathbb{R}^2 \quad .$$

– *Si $\Delta = 0$. Soit λ et la solution double dans $\mathbb{R}$ de (E).*
Alors,

$$S = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid u_n = A(\lambda)^n + nB(\lambda)^n\} \text{ où } (A,B) \in \mathbb{R}^2 \quad .$$

– *Si $\Delta < 0$. Soit λ_1 et λ_2 les solutions dans $\mathbb{C}$, complexes conjugués, de (E).*
Alors,

$$\lambda_1 = \rho \exp(i\theta) \text{ et } \lambda_2 = \rho\exp(-i\theta)$$

$$S = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid u_n = A(\rho)^n \exp(in\theta) + B(\rho)^n \exp(-in\theta)\} \text{ où } (A,B) \in \mathbb{R}^2 \quad .$$

Or, une transformation trigonométrique simple montre que

$$A\exp(in\theta) + B\exp(-in\theta) = A'\cos(n\theta) + B'\sin(n\theta) = C\cos(n\theta+\psi) \quad .$$

Donc,

$$S = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid u_n = A(\rho)^n \cos(n\theta) + B(\rho)^n \sin(n\theta)\} \text{ où } (A,B) \in \mathbb{R}^2 \quad .$$

Exemples :

1. $u_{n+2} = -4u_{n+1} - 3u_n$.
   (E) s'écrit : $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$. On obtient $\Delta = 1$ et $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = -3$.
   Donc $u_n = A(-1)^n + B(-3)^n$.
   Pour $u_0 = 6$ et $u_1 = 14$ on obtient $A = 16$ et $B = -10$ d'où

   $$S = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid u_n = 16(-1)^n - 10(-3)^n\ \} \quad .$$

2. $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
   (E) s'écrit : $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$. On obtient $\Delta = 0$ et $\lambda = 2$.
   Donc $u_n = A2^n + Bn2^n$.
   Pour $u_0 = 1$ et $u_1 = 6$ on obtient $A = 1$ et $B = 2$ d'où

   $$S = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid u_n = 2^n + 2n2^n\ \} \quad .$$

3. $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 4u_n$.
   (E) s'écrit : $\lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0$. On obtient $\Delta = -3$ et $\lambda_1 = 2\exp(i\frac{\pi}{3})$ et $\lambda_2 = 2\exp(-i\frac{\pi}{3})$.
   Donc $u_n = 2^n\left(A\cos(n\frac{\pi}{3}) + B\sin(n\frac{\pi}{3})\right)$.
   Pour $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ on obtient $A = 0$ et $B = \frac{\sqrt{3}}{3}$ d'où

   $$S = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid u_n = 2^n\frac{\sqrt{3}}{3}\sin(n\frac{\pi}{3})\ \} \quad .$$

2.3 Intégrales simples, impropres, doubles et triples

Le calcul de ces intégrales s'avère indispensable dans de nombreux domaines des mathématiques ou de la physique, notamment en probabilité.

2.3.1 Intégrales définies

Je rappelle ici les principales méthodes utilisées pour le calcul d'intégrales définies. Soit $[a,b]$ un compact de $\mathbb{R}$ et soit à calculer $\int_a^b f(x)dx$.

1. Reconnaître que f est la dérivée d'une fonction G. Alors :
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b G'(x)dx = G(b) - G(a) \quad .$$
2. Faire une intégration par parties. Alors :
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx \quad .$$
3. Faire un changement de variables. Certains sont assez classiques mais chaque cas est un cas particulier. Il faut procéder par étapes, faire beaucoup d'exercices, et procéder méthodiquement selon les étapes suivantes :

   - changer dx
   - changer les bornes a et b
   - effectuer le changement dans la fonction f

2.3.2 Intégrales impropres

Le cacul des intégrales définies s'étend à des intégrales pour lesquelles une ou les deux bornes sont infinies ou pour lesquelles f n'est pas définie en a ou en b. La généralisation de la notion d'intégrale se fait alors grâce à la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ et à la notion de limite.

Fonctions définies par une intégrale

Définition 12 *Soit* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *et* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *intégrable au sens de Riemann (typiquement* f *est en escalier ou continue). On définit la fonction :*
$$\begin{array}{cccc} F : & [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \int_a^x f(t)dt \end{array} \quad .$$
La principale caractéristique de F est la suivante :

Théorème 12
$$\forall\, x \in [a,b]\,,\, F'(x) = f(x) \quad .$$

Pour $a \in \overline{\mathbb{R}}$ ou $b \in \overline{\mathbb{R}}$ l'idée est de prolonger cette fonction par la limite, si elle existe, de $F(x)$.
Exemple : Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ t & \mapsto & \frac{1}{1+t^2} \end{array} \quad \text{et} \quad F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_0^x f(t)dt \end{array} \quad .$$

Pour $x > 1$, on a

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} + \int_1^x \frac{dt}{1+t^2} \quad ,$$

D'où,

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \leq 1 + \int_1^x \frac{dt}{t^2} \leq 2 \quad .$$

Par suite, F est croissante, majorée par 2. Une propriété essentielle de $\mathbb{R}$ est de montrer que dans ces conditions, F admet une limite quand x tend vers $+\infty$, et on montre alors que :

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \frac{\pi}{2} \quad .$$

Définition 13 *Si F admet une limite quand x tend vers $b = +\infty$ (ou $a = -\infty$), on dit que l'intégrale est convergente en b (ou en a). Sinon, on dit qu'elle est divergente.*
Si l'intégrale converge par exemple pour $b = +\infty$, on note $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ la limite obtenue.
L'exemple précédent montre clairement que cette notion soulève 2 problèmes différents : l'existence de la limite d'une part, son calcul d'autre part. Les problèmes d'existence se ramènent le plus souvent à des problèmes de comparaison afin d'exploiter les théorèmes généraux qui vont suivre. Le calcul est souvent délicat et l'informatique y a apporté une aide précieuse. Quand ce calcul est possible "à la main", les techniques sont les mêmes que celles utilisées dans le cas des intégrales définies. Il faut néanmoins s'assurer à chaque étape que les termes ou les décompositions utilisées ont un sens et restent convergents.

Problème d'existence pour $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

Le premier problème simple est celui où f n'est pas définie en b, mais admet une limite finie. Le théorème suivant justifie le sens de $F(b)$.

Théorème 13 *Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Si f n'est pas définie en b , mais si $\lim_{x\to b^-} f(x) = l \in \mathbb{R}$, alors $\int_a^b f(t)dt$ est convergente en b.*
Bien sûr, le même théorème est valable pour a.
Exemples :

1. $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ est convergente en 0 car $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
2. $\int_0^1 x \ln x dx$ est convergente en 0 car $\lim_{x\to 0} x \ln x = 0$.

Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Si f n'est pas définie en b , mais si $\lim_{x\to b^-} f(x) = l = \pm\infty$, alors $\int_a^b f(t)dt$ est convergente dans certains cas. En particulier le théorème suivant donne les cas de référence où l'intégrale est convergente.

Théorème 14 *Soit* $[a,b] \subset \mathbb{R}$*. Soit* $\alpha \geq 0$*.*

$$a = 0 \ , \ b \in \mathbb{R}. \quad \int_0^b \frac{dt}{t^\alpha} \ CV \ \Leftrightarrow \ \alpha < 1 \quad .$$

$$a \in \mathbb{R} \ , \ b \in \mathbb{R}. \quad \int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha} \ CV \ \Leftrightarrow \ \alpha < 1 \quad .$$

$$a > 0 \ , \ b = +\infty. \quad \int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \ CV \ \Leftrightarrow \ \alpha > 1 \quad .$$

Démonstration

Pour la première équivalence on a :

$$\text{Si } \alpha = 1 \ , \ F(x) = \int_x^b \frac{dt}{t} = \ln b - \ln x \ , \text{ et} \lim_{x \to 0} F(x) = +\infty \quad .$$

$$\text{Si } \alpha \neq 1 \ , \ F(x) = \int_x^b \frac{dt}{t} = \left[\frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{t^{\alpha-1}} \right]_x^b = \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{b^{\alpha-1}} - \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right) \quad .$$

D'où le résultat. ■

Des démonstrations similaires sont utilisées pour les autres équivalences.

Problème d'existence pour f positive $[a,b]$ non borné

Nous considérons ici le cas $a \in \mathbb{R}$ et $b = \infty$, $\alpha \geq 0$. L'idée est bien sûr d'exploiter les résultats précédents et de conclure la convergence d'une intégrale par des arguments de comparaison avec $\frac{1}{t^\alpha}$. Le procédé rigoureux est justifié par le théorème suivant:

Théorème 15

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt \ CV \ \Leftrightarrow \ F \textit{ majorée sur } [a,b[\quad .$$

Nous avons alors le résultat pratique suivant :

Théorème 16 *Soit* f *et* g *:* $[a,b[\to \mathbb{R}_+$ *telles que* $0 \leq f(x) \leq g(x)$*. Alors :*

$$\int_a^b g(t)dt \ CV \ \Rightarrow \ \int_a^b f(t)dt \ CV \quad ,$$

$$\int_a^b f(t)dt \ DIV \ \Rightarrow \ \int_a^b g(t)dt \ DIV \quad .$$

Corollaire 2 *Soit* $f : [a;b[\to \mathbb{R}_+$*. Si*

$$\exists \ l \in \overline{\mathbb{R}} \ \exists \ \alpha \in \mathbb{R}_+ \ tq \lim_{x \to +\infty} x^\alpha f(x) = l \ , alors :$$

1. *si* $l \in \mathbb{R}^*$*:* $\int_a^b f(t)dt \ CV \ \Leftrightarrow \ \alpha > 1$ *.*

2. si $l = 0$ et $\alpha > 1$ alors $\int_a^b f(t)dt$ CV.

3. si $l = +\infty$ et $\alpha < 1$ alors $\int_a^b f(t)dt$ DIV.

Démonstration

1. On a alors :

$$\exists\, A \in \mathbb{R}_+ \mid \forall\, x \geq A\,,\ \frac{l}{2} \leq x^\alpha f(x) \leq 2l \quad ,$$

donc ,

$$\forall\, x \geq A\,,\ \frac{l}{2x^\alpha} \leq f(x) \leq \frac{2l}{x^\alpha} \quad ,$$

d'où le résultat .

2. $l = 0$, soit $\epsilon > 0$, on a alors :

$$\exists\, A \in \mathbb{R}_+ \mid \forall\, x \geq A\,,\ 0 \leq x^\alpha f(x) \leq \epsilon \quad ,$$

donc,

$$\text{si } \alpha > 1 \text{ , alors } \int_a^{+\infty} \frac{\epsilon}{x^\alpha} dx \text{ est CV ,} \quad ,$$

d'où le résultat .

3. $l = +\infty$, soit $B > 0$, on a alors :

$$\exists\, A \in \mathbb{R}_+ \mid \forall\, x \geq A\,,\ B \leq x^\alpha f(x) \quad ,$$

donc ,

$$\text{si } \alpha < 1 \text{ , alors } \int_a^{+\infty} \frac{B}{x^\alpha} dx \text{ est DIV ,} \quad ,$$

d'où le résultat .

■

Exemples :

$$\int_0^{+\infty} \exp(-x^2)dx \text{ est CV car } \lim_{x\to+\infty} x^2 \exp(-x^2) = 0 \quad .$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln(x))^\beta} dx \text{ CV ssi } (\alpha > 1) \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1) \quad .$$

Le pendant du corollaire 2 pour le cas où f est n'est pas définie en b avec $b \in \mathbb{R}$ est le corollaire 3 suivant :

Corollaire 3 *Soit $f : [a; b[\to \mathbb{R}_+$, non définie en $b \in \mathbb{R}$. Si*

$$\exists\, l \in \overline{\mathbb{R}}\ \exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+ \ tq\ \lim_{x\to b} (b-x)^\alpha f(x) = l \text{ ,alors :}$$

1. si $l \in \mathbb{R}^*$: $\int_a^b f(t)dt$ CV $\Leftrightarrow$ $\alpha < 1$.

2. si $l = 0$ et $\alpha < 1$ alors $\int_a^b f(t)dt$ CV.

3. si $l = +\infty$ et $\alpha > 1$ alors $\int_a^b f(t)dt$ DIV.

Exemples :

$$\int_a^b \frac{dx}{x\sqrt{(b-x)}} \text{ CV} \quad .$$

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x^\alpha} dx \text{ CV ssi } \alpha < 2 \quad .$$

Intégrales absolument convergentes

Il est important de remarquer qu'une condition nécessaire à la convergence d'une intégrale pour $b = +\infty$ est que la fonction elle même doit avoir une limite, nulle en l'occurrence, ce que dit le théorème suivant :

Théorème 17 *Soit f , $[a, +\infty[\ \rightarrow \mathbb{R}$. Alors*

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt \ \ CV \ \Rightarrow \lim_{t\rightarrow+\infty} f(t) = 0 \quad .$$

A contrario ceci permet dans certains cas de montrer qu'une intégrale diverge.
Exemples : $\int_1^{+\infty} \exp(t)dt$ DIV. Le plus utile expérimentalement, pour vérifier la convergence d'une intégrale est de vérifier le critère de Cauchy :

Théorème 18 *Soit f , $[a, +\infty[\ \rightarrow \mathbb{R}$. Alors,*

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt \ \ CV \ \Leftrightarrow \forall \ \epsilon \ > 0 \ , \exists \ c \ \in \ [a,b[\ | \ \forall \ (x,x') \ \in \ [c,b[^2 \ , |F(x) - F(x')| < \epsilon \quad .$$

Ceci est lié au fait que, dans $\mathbb{R}$, une fonction admet une limite ssi elle vérifie ce critère de Cauchy.
Ceci conduit alors à examiner la convergence d'une intégrale de $|f|$.

Définition 14 *L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est dite absolument convergente (en abréviation ACV) ssi $\int_a^b |f(t)|\, dt$ est convergente.*
Dans le cas de l'ACV, on est ramené au cas où f est à valeurs positives. Intuitivement, le critère de convergence absolue semble "plus fort" que celui de convergence et ce critère est particulièrement utile pour les fonctions dont le signe n'est pas constant. C'est en effet le cas, au sens de la proposition suivante :

Proposition 2

$$\int_a^b |f(t)|\, dt \ \ CV \ \Rightarrow \int_a^b f(t)dt \ \ CV \, .$$

Cette proposition se démontre grâce au critère de Cauchy.
Exemple :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt \text{ est CV pour } \alpha > 0 \text{ , ACV pour } \alpha > 1 \quad .$$

D'où $\int_1^{+\infty} \sin(t^2)dt$ et $\int_1^{+\infty} \cos(t^2)dt$ CV.

2.3.3 Intégrales doubles et triples

Définitions

Le problème est de généraliser l'intégrale simple qui permet de réaliser des sommations en fonction d'une seule variable à des sommations sur deux ou plusieurs variables. L'idée la plus simple, qui s'avèrera correcte sous des conditions raisonnables est d'intégrer d'abord par rapport à une variable selon les modalités déjà connues, puis par rapport à une autre et ainsi de suite. Formellement cette problématique se traduit comme suit:
Soit $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ un domaine de $\mathbb{R}^2$.
Soit f une fonction définie sur D. Dans le cas particulier , simple, où $D = [a,b] \times [c,d]$, on souhaiterait calculer $\int\int_D f(x,y)dxdy$, en se ramenant à des intégrales simples. Il n'y a pas lieu de privilégier $[a,b]$, par rapport à $[c,d]$. La question est donc, a t'on?

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy \quad ?$$

C'est le point essentiel de la théorie des intégrales multiples. Ces intégrales ne sont introduites dans ce document que dans un but essentiellement pratique visant à des calculs effectifs. Ce théorème ne sera donc pas démontré. Il suppose des conditions adéquates sur f mais celles-ci sont vérifiées dans la majorité des cas fréquemment rencontrés. En particulier, on examinera le cas où f est continue par rapport à x et continue par rapport à y. La définition suivante est alors valide:

Définition 15 *Soit $D : [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$ et $f : D \to \mathbb{R}$, qui au couple de variables (x,y) associe $f(x,y)$, continue par rapport à x et continue par rapport à y. On appelle intégrale double de f sur D le réel:*

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy \quad .$$

Il se peut, bien sûr, que le domaine D soit plus complexe.

On peut, par exemple, écrire D de la façon suivante :

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ , } \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\} \quad .$$

Les conditions imposées à ϕ_1 et ϕ_2 sont d'être continues sur $[a,b]$.

Définition 16 *On appelle intégrale double sur D et on note $\iint f(x,y)dxdy$ le réel:*

$$I = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx \quad .$$

Lorsque $f(x,y) = 1$, ce réel représente l'aire du domaine D.
Exemple:
Soit Δ l'aire du triangle définie par ses trois sommets A, B et C où $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} c \\ h \end{pmatrix}$. On a :

$$\Delta = \int\int_D dxdy = \int_0^c \left(\int_0^{h_1(x)} dy \right) dx + \int_c^b \left(\int_0^{h_2(x)} dy \right) dx \quad ,$$

où $h_1(x)$ est l'ordonnée d'un point de la droite AC, $h_2(x)$ celle de la droite CB.
On a :

$$h_1(x) = \frac{h}{c}x \quad et \quad h_2(x) = \frac{h}{c-b}(x-b) \quad .$$

D'où :

$$\Delta = \int_0^c \frac{h}{c} x dx + \int_c^b \frac{h}{c-b}(x-b)dx \quad ,$$

$$\Delta = \frac{1}{2}\frac{h}{c}c^2 + \frac{1}{2}\frac{h}{c-b}\left(-(c-b)^2\right) = \frac{1}{2}hb \quad .$$

On retrouve la formule de l'aire du triangle.
Dans la pratique les calculs sont plus compliqués et nécessitent le plus souvent des changements de variables. Ceux-ci sont plus complexes que dans le cas d'une intégrale simple et font intervenir la notion de Jacobien.

Changement de variables, jacobien

Définition :
Soit la fonction:

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ & (x_1,x_2,\ldots,x_n) & \mapsto & (f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_n(x_1,\ldots,x_n)) \end{array}$$

Les applications $f_1,f_2,\ldots,f_n$ sont appelées les applications partielles de f. Cette transformation est supposée vérifier des propriétés qui rendent possible le changement de variables. En l'occurrence, il faut que cette transformation corresponde à une transformation "physique" réversible. Pour cela, on suppose que chacune des applications partielles est dérivable par rapport à chacune des variables $x_1,x_2,\ldots,x_n$.

Définition 17 *Dans ces conditions, on appelle matrice jacobiennee de f en $a = (a_1,a_2,\ldots,a_n)$ la matrice $\widetilde{J}_f$ définie par :*

$$\widetilde{J}_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Cette matrice intervient dans le changement de variables pour traduire l'effet de la transformation sur le petit élément de surface $dxdy$ (dans la cas du plan plus simple à visaliser).

Dans la cas d'un changement de variable à une dimension on est plus familier avec le changement de variable. On a par exemple

$$\begin{array}{rcl} x & = & \phi(t) \\ dx & = & \phi'(t)dt \end{array}$$

dx fait intervenir la dérivée ϕ'. En dimension n il n'est donc pas si surprenant que les dérivées partielles jouent un rôle et doivent rendre compte du changement d'échelle. La quantité qui traduit ce changement d'échelle est le déterminant de $\widetilde{J_f}$.

Définition 18 *On appelle jacobien de f et on note J_f le réel $|\widetilde{J_f}|$ égal au déterminant de la matrice jacobienne.*

Dans le plan, le changement classique de changement de variables est le passage en coordonnées polaires.

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* \times [0,2\pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta) & \mapsto & (x = r\cos\theta, y = r\sin\theta) \end{array} .$$

On a alors :

$$|\widetilde{J_f}| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r \quad .$$

Dans l'espace, les changements classiques sont le passage en coordonnées cylindriques et le passage en coordonnées sphériques.
Le passage en coordonnées cylindriques correspond à la transformation :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* \times [0,2\pi] \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ (r,\theta,z) & \mapsto & (x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z) \end{array} .$$

On a alors :

$$|\widetilde{J_f}| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \quad .$$

Le passage en coordonnées sphériques correspond à la transformation :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* \times [0,\pi] \times [0,2\pi] & \to & \mathbb{R}^3 \\ (r,\theta,\varphi) & \mapsto & (x = r\sin\theta\cos\varphi, y = r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) \end{array} .$$

On a alors :

$$|\widetilde{J_f}| = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta \quad .$$

Changement de variables

Pour ne pas surcharger les notations nous nous limiterons à l'énoncé du théorème dans le cas d'un changement de variables dans le plan, mais le théorème se généralise à la dimension n.

Théorème 19 *Soit D un domaine de $\mathbb{R}^2$. Soit*

$$\begin{array}{cccc} \varphi & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (u,v) & \mapsto & (x = \varphi_1(u,v), y = \varphi_2(u,v)) \end{array}$$

tel que φ admette un jacobien J_φ. Le domaine D, où varient x et y est l'image unique par φ d'un domaine Δ où varient u et v. Soit donc $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ tel que $D = \varphi(\Delta)$. Soit f une fonction continue et bornée sur D. Alors :

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_\Delta f\left(\varphi_1(u,v),\varphi_2(u,v)\right)|J_\varphi|dudv \quad .$$

Attention :$|J_\varphi|$ désigne la valeur abolue du jacobien.
La méthode du changement de variables est donc toujours la même:

1. changer dxdy (donc calculer le jacobien)
2. changer le domaine (c'est le plus délicat)
3. Modifier la fonction en conséquence

Exemples dans le plan

Aire du cercle :
Soit $D = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Soit I l'aire de D. Alors $I = \int\int_D dxdy$. D'après le changement de variables en coordonnées polaires, on a : $I = \int\int_\Delta rdrd\theta$. avec $\Delta = [0,1] \times [0,2\pi]$. Par symétrie, on obtient :

$$I = 4\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} rdrd\theta = \pi \quad .$$

Aire de l'ellipse :
Soit $D = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$. Soit I l'aire de D. Alors $I = \int\int_D dxdy$. Posons :

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (\rho,\theta) & \mapsto & (a\rho\cos\theta, b\rho\sin\theta) \end{array} .$$

Alors :

$$\widetilde{J_f} = \begin{pmatrix} a\cos\theta & -\rho a\sin\theta \\ b\sin\theta & \rho b\cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad J_f = ab\rho \quad \text{et} \quad \Delta = [0,1] \times [0,2\pi] \quad ,$$

D'où,

$$I = 4\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} ab\rho d\theta d\rho = 4\int_0^1 \frac{\pi}{2} ab\rho d\rho = \pi ab \quad .$$

Exemples dans l'espace

Volume d'une sphère :
Soit $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$. Soit I le volume le D. On effectue le changement de variables en coordonnées sphériques. D'où :

$$I = \int\int\int_D dxdydz = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin(\theta) d\varphi d\theta dr \quad ,$$

$$I = 2\pi \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad .$$

Volume d'une pyramide :
Soit D une pyramide de hauteur h dont la surface à la base est A. Soit V son volume. Soit O le sommet de la pyramide. À distance z du sommet, la surface de la pyramide vaut $A(z) = \frac{z^2}{h^2}A$. Pour une petite variation dz de la distance au sommet le volume engendré est A(z)dz. Le volume de la pyramide se calcule de la façon suivante :

$$V = \int_0^h A(z)dz = \int_0^h \frac{A}{h^2} z^2 dz = \frac{Ah}{3} \quad .$$

2.4 Rappels de trigonométrie

Les intégrales (et les calculs mathématiques en général) font très souvent intervenir les fonctions trigonométriques dont voici quelques propiétés:
$\forall\ a,b \ \in \mathbb{R}$ on a

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$$

$$\cos a = \cos(-a) \quad \text{fonction paire}$$

$$\sin(-a) = -\sin(a) \quad \text{fonction impaire}$$

$$\cos(a+b) = \cos a \ \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\tan(2a) = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a} \ ,$$

$$1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$$

Ces formules représentent le minimum à savoir manipuler dans tous les sens. Néanmoins, elles peuvent se retrouver grâce à l'utilisation des nombres complexes et de l'égalité suivante :

$$e^{ix} = cosx + isinx \ ,$$

Cette formule est souvent utile pour exprimer $\cos^n(x)$ ou $\sin^n(x)$ comme combinaison linéaire des $\cos(kx)$ et $\sin(kx)$ dont on connaît les primitives.
Applications :

Les applications possibles de ces formules sont trop nombreuses à expliciter. Nous donnerons une application utile dans de nombreux domaines : la valeur moyenne d'un signal carré.

Définition 19 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ intégrable au sens de Riemann. On appelle valeur moyenne de f la quantité :*

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \; .$$

Posons

$$\forall t \in [0;2\pi] \; , \; f(t) = \sin^2(t) \quad .$$

Alors

$$m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2t}{2}dt = \frac{1}{2} \quad .$$

Posons

$$\forall t \in [0;2\pi] \; , \; f(t) = \cos^2(t) \; .$$

Alors

$$m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{1}{2} \; .$$

2.5 Décomposition en éléments simples

Il est très fréquent dans le calcul d'une intégrale que celle-ci fasse intervenir le rapport de deux polynômes où le degré du numérateur soit plus petit que le degré u dénominateur. Sauf losque le numérateur apparaît comme la dérivée du dénominateur (à un facteur multiplicatif près), on ne sait pas trouver des primitives de ces fractions. L'idée est donc de réécrire ces fractions comme la somme de fractions “plus simples” (en termes de calculs de primitives). Les méthodes utilisées sont issues de la théorie dite de décomposition en éléments simples de fractions rationnelles.
Nous nous limiterons ici à deux cas simples (néanmoins généralisables) mais qui suffisent dans la majorité des cas.

Théorème 20 *Soit*

$$F[X] = \frac{A}{B_1B_2} \quad ,$$

la fraction rationnelle telle que A,B_1,B_2 soient des polynômes à coefficients dans $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, tq $degre(F) < 0$ et $B_1 \wedge B_2 = 1$.
Alors, il existe 2 polynômes uniques A_1 et A_2 tels que

$$F = \frac{A_1}{B_1} + \frac{A_2}{B_2} \text{ où } d^\circ A_i < d^\circ B_i \quad .$$

On cherche alors une relation entre A_i et la derivée de B_i.
Exemple :

$$F(X) = \frac{X}{1+X^3} = \frac{X}{(1+X)(X^2-X+1)} \text{ . (les hypothèses du théorème sont vérifiées)}$$

Donc,

$$F(X) = \frac{A}{X+1} + \frac{BX+C}{X^2-X+1} \text{ . (A,B et C à déterminer)}$$

Après calculs, on obtient :

$$F(X) = \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{X+1} + \frac{X+1}{X^2-X+1}\right) \quad .$$

Pour trouver une primitive de F il faut encore modifier l'expression précédente pour faire apparaître la dérivée de $X^2 - X + 1$. On obtient :

$$F(X) = \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{X+1} + \frac{X-\frac{1}{2}}{X^2-X+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{X^2-X+1}\right) \quad .$$

On sait alors calculer la primitive de chacun des termes.

Théorème 21 *Soit*

$$F[X] = \frac{A}{B^\alpha} \quad ,$$

la fraction rationnelle telle que $\alpha \in \mathbb{N}^*$, $degre(F) < 0$.
Alors, il existe α *polynômes uniques* C_1 , ..., C_α *tels que*

$$F = \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{C_i}{B^i} \text{ où } d^\circ C_i < d^\circ B \quad .$$

On cherche alors une relation entre C_i et la derivée de B.
Exemple :

$$F(X) = \frac{X^2}{(1+2X)^3} \text{ . (les hypothèses du théorème sont vérifiées)}$$

Donc,

$$F(X) = \frac{A}{(2X+1)} + \frac{B}{(2X+1)^2} + \frac{C}{(2X+1)^3}\text{. (A,B et C à déterminer)}$$

Après calculs, on obtient :

$$F(X) = \frac{\frac{1}{4}}{(2X+1)} + \frac{\frac{-1}{2}}{(2X+1)^2} + \frac{\frac{1}{4}}{(2X+1)^3} \quad .$$

On sait alors calculer la primitive de chacun des termes.
Conseils pratiques : Pour trouver les coefficients (dans les exemples, A, B et C) il suffit souvent de

- Multiplier les deux membres de l'égalité par un des facteurs du dénominateur ($(1+X)$ dans le premier exemple), $(2X+1)^3$ dans le deuxième exemple) et substituer à X des valeurs “ad-hoc” (-1 dans ex.1 et -1/2 dans ex.2).

- Multiplier par X, X^2,...,X^n et prendre la limite en $+\infty$.
- Prendre des valeurs particulières pour X (0, 1 etc.)

2.6 Équations différentielles simples

La plupart des phénomènes observés en sciences (biologie, datation, electricité, pesanteur, résonnance) sont des phénomènes que l'on tente de cerner par des mesures, et ces mesures évoluent avec le temps. Ce temps, peut être considéré comme discret et l'on obtient alors des suites de nombres pour lesquelles on tente de détecter des équations de récurrence. Ce temps peut aussi être considéré comme continu et l'on obtient alors une suite de mesures qui sont modélisées comme une fonction du temps y(t). Très souvent ces fonctions sont liés à leurs dérivées successives par des équations dites équations différentielles. La forme de ces équations est très variable, leur difficulté de résolution aussi. Nous nous restreindrons ici aux équations les plus faciles à résoudre (tout en étant assez courante dans la pratique!).
Deux problématiques se posent : y-a t'il une solution et, si oui, quelle est leur expression? Y -a t-il unicité de la solution pour une condition initiale donnée? Cette deuxième problématique porte le nom de problème de Cauchy en référence au célèbre mathématicien ayant travaillé sur cette question.

2.6.1 Équations différentielles linéaires du premier ordre, sans second membre

À valeurs dans $\mathbb{R}$

La fonction $y(t)$ vérifie l'équation :

$$y'(t) = \lambda y(t) \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad . \tag{2.1}$$

Cette équation signifie que l'accroissement de la valeur de y entre l'instant t et $t+h$ pour h très très petit est proportionnel à la valeur de y à l'instant t et au laps de temps écoulé h.

Rappel : la fonction $t \mapsto \exp t$ est la fonction telle que $y'(t) = y(t)$. Pour résoudre l'équation 2.1 il est donc "naturel" de penser à des fontions de la forme $e^{\lambda t}$. Le théorème **??** donne les solutions:

Théorème 22 ?? *Les solutions de l'équation différentielle 2.1 sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que*

$$y(t) = Ae^{\lambda t} \quad \textit{où} \quad A = y(0) \quad .$$

Problème de Cauchy: dans le cas présent ce problème s'énonce de la façon suivante. Sait-on prévoir sans ambiguité l'évolution d'un phénomène dont on connait

- La condition initiale : $y(0) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$,
- La loi du comportement dans le temps : $y'(t) = \lambda y(t)$.

Théorème 23 *Ce problème admet une solution unique, c'est la fonction* $y(t) = \alpha e^{\lambda t}$.

À valeurs dans $\mathbb{C}$

La fonction $y(t)$ vérifie l'équation :

$$y'(t) = \lambda y(t) \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad . \tag{2.2}$$

Rappel sur les dérivées des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$:
Soit $I \subset \mathbb{R}$, $y_1 : I \to \mathbb{R}$ et $y_2 : I \to \mathbb{R}$ et $y : I \to \mathbb{C}$ telle que $y = y_1 + iy_2$. Alors y est dérivable en $t \in I$ ssi y_1 et y_2 le sont et $y'(t) = y_1'(t) + iy_2'(t)$.
Exemple :

$$y(x) = e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$
$$y'(x) = -\sin(x) + i\cos(x) = ie^{ix} \quad \text{D'où} \quad y'(x) = iy(x).$$

Plus généralement, si $\lambda = \alpha + i\omega$ alors

$$e^{\lambda x} = e^{\alpha x} e^{i\omega x} \quad \text{et} \quad (e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x} \quad .$$

Intuitivement les mêmes règles s'appliquent donc sur $\mathbb{C}$ et le théorème s'énonce de la façon suivante:

Théorème 24 *Les solutions à valeurs complexes de l'équation différentielle 2.2 sont les fonctions définies sur* $\mathbb{R}$ *à valeurs dans* $\mathbb{C}$ *telles que*

$$y(t) = Ae^{\lambda t} \quad \textit{où} \quad A = y(0) \in \mathbb{C} \quad .$$

Problème de Cauchy: dans le cas présent ce problème s'énonce de la façon suivante. Sait-on prévoir sans ambiguité l'évolution d'un phénomène dont on connait

- La condition initiale : $y(0) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$,
- La loi du comportement dans le temps : $y'(t) = \lambda y(t)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Théorème 25 *Ce problème admet une solution unique, c'est la fonction* $y(t) = \alpha e^{\lambda t}$.

2.6.2 Équations différentielles linéaires du second ordre

Il est assez fréquent que les équations différentielles fassent intervenir des dérivées secondes. Nous ne considérerons ici que les plus simples dites linéaires.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On cherche des fonctions deux fois dérivables sur I telles que :

$$\forall\, t \in I \; , y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0 \quad . \tag{2.3}$$

Quelques remarques évidentes s'imposent:

- Si y et z sont 2 solutions de 2.3, alors toute combinaison linéaire de y et z est solution de 2.3. Donc $\{y \mid y \text{ solution de } 2.3\}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

– Si une telle fonction y existe alors y admet des dérivées n-ième, notées $y^{(n)}$, et $y^{(n)}$ est solution de 2.3.

Pour trouver des solutions de 2.3 l'idée est de se ramener au problème précédent grâce à un changement de variable. On pose $z = y' - my$ et on cherche les conditions sur m et p pour que z soit solution de $z' = pz$.
Cela s'écrit

$$(y' - my)' = p(y' - my) \quad ,$$

$$y''(t) - (m+p)y'(t) + pmy(t) = 0 \quad .$$

Cette équation est donc équivalente à 2.3 ssi (m+p) =-a et mp =b.
m et p sont donc deux réels dont on connait la somme et le produit. Ils sont donc solutions de l'équation 2.4 suivante :

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \tag{2.4}$$

Si λ_1 est solution de 2.4 l'équation $z' = \lambda_1 z$ donne $z(t) = Ae^{\lambda_1 t}$ et il s'agit alors de résoudre

$$y'(t) - \lambda_2 y(t) = Ae^{\lambda_1 t} \quad .$$

Il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre avec second membre qui sera étudiée à la section 2.6.3.
Les solutions à l'équation 2.3 dépendent des solutions de l'équation 2.4. Trois cas sont donc possibles. Soit Δ le discriminant de l'équation 2.4.

Théorème 26 *Supposons $\Delta > 0$. L'équation 2.4 admet 2 racines distinctes réelles λ_1,λ_2. Les solutions de 2.3 sont toutes les fonctions*

$$y(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \quad \textit{où} \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2 \quad .$$

Exemple : $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 0$ a pour solutions sur $\mathbb{R}$, $y(t) = Ae^{t} + Be^{2t}$.

Théorème 27 *Supposons $\Delta = 0$. L'équation 2.4 admet 1 racine double réelle λ. Les solutions de 2.3 sont toutes les fonctions*

$$y(t) = (At + B)e^{\lambda t} \quad \textit{où} \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2 \quad .$$

Exemples : $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0$ a pour solutions sur $\mathbb{R}$, $y(t) = (At + B)e^{-t}$.
Démonstration

e^{-t} est solution de 2.3. Soit y une solution de 2.3. Posons $z(t) = y(t)e^{t}$. Alors
y solution de 2.3$\Leftrightarrow$ $z''(t) = 0$
d'où $z(t) = At + B$. ■

Théorème 28 *Supposons $\Delta < 0$. L'équation 2.4 admet 2 racines complexes conjuguées $\lambda_1 = r + i\omega$, $\lambda_2 = r - i\omega$. Les solutions à valeurs réelles de 2.3 sont toutes les fonctions*

$$y(t) = Ae^{rt}\cos\omega t + Be^{rt}\sin\omega t \quad \textit{où} \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2 \quad .$$

Exemple : $y''(t) + 4y(t) = 0$ a pour solutions sur $\mathbb{R}$, $y(t) = A\cos 2t + B\sin 2t$.
Problème de Cauchy : Dans tous les cas, les solutions varient en fonction de deux paramètres A et B. La donnée d'une seule condition $y(0)$ en plus de l'équation 2.3 ne suffira donc pas à déterminer une trajectoire unique. Il faut donc une condition initiale supplémentaire : la donnée de $y'(0)$.

Théorème 29 *Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. Le système d'équations :*

$$y(0) = \alpha, \, , y'(0) = \beta \, , y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0 \quad ,$$

admet une solution unique à valeurs dans $\mathbb{R}$.

2.6.3 Équations différentielles linéaires du premier ordre, avec second membre

Comme il a été suggéré à la section précedente , il s'agit de résoudre l'équation

$$y'(t) - \lambda y(t) = \alpha(t) \quad . \tag{2.5}$$

Nous savons que l'équation 2.5 sans second membre a pour solutions :

$$y(t) = Ae^{\lambda t} \quad .$$

L'idée, dite *méthode de la variation de la constante*, est de rechercher une solution particulière de 2.5 sous la forme :

$$y_0(t) = A(t)e^{\lambda t} \quad .$$

y_0 doit alors vérifier :

$$A'(t)e^{\lambda t} = \alpha(t) \, .$$

D'où

$$A'(t) = e^{-\lambda t}\alpha(t) \quad \text{donc} \quad A(t) = \int \alpha(t)e^{-\lambda t}dt \quad ,$$

en espérant que cette primitive soit simple, ce qui est par exemple le cas si $\alpha(t) = e^{\alpha t}$. Soit y_1 une autre solution de 2.5. Alors $y_1 - y_0$ est solution de $y' = \lambda y$ donc $y_1(t) = y_0(t) + Ae^{\lambda t}$. D'où le théorème suivant :

Théorème 30 *Soit y_0 une solution de 2.5. Les solutions de 2.5 sont toutes les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ telles que :*

$$y(t) = y_0(t) + Ae^{\lambda t} \quad \text{où} \quad A \in \mathbb{R} \quad .$$

2.6.4 Équations différentielles linéaires du second ordre avec second membre exponentiel

On cherche à résoudre l'équation suivante :

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = e^{\alpha t} \quad \text{où} \quad \alpha \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \quad . \tag{2.6}$$

De même que précédemment, il suffit de trouver une solution particulière de l'équation 2.6. Le théorème suivant indique sous quelle forme il est souhaitable de chercher cette solution.

Théorème 31 *Soit l'équation 2.6, et soit Δ le discriminant de l'équation caractérisque 2.4 associée . Soient (λ_1,λ_2) les solutions dans $\mathbb{C}$ de 2.4.*

- *Si $\Delta = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.*
  1. *$\alpha \neq \lambda$: on cherche une solution particulière sous la forme $Ae^{\alpha t}$.*
  2. *$\alpha = \lambda$: on cherche une solution particulière sous la forme $At^2e^{\alpha t}$.*
- *Si $\Delta \neq 0$*
  1. *$\alpha \neq \lambda_1$ et $\alpha \neq \lambda_2$,: on cherche une solution particulière sous la forme $Ae^{\alpha t}$.*
  2. *$\alpha = \lambda_1$ ou $\alpha = \lambda_2$: on cherche une solution particulière sous la forme $Ate^{\alpha t}$.*

Exemples:

1. $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = e^{-t}$.
   $\Delta \neq 0$, -1 n'est pas solution de l'équation caractéristique,
   les solutions sont $y(t) = -\frac{1}{2}e^{-t} + Ae^t + Be^{-2t}$, $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.
2. $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = e^t$.
   $\Delta \neq 0$, 1 est solution de l'équation caractéristique,
   les solutions sont $y(t) = \frac{t}{3}e^t + Ae^t + Be^{-2t}$, $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.
3. $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 3e^{2t}$.
   $\Delta = 0$, 2 n'est pas solution de l'équation caractéristique,
   les solutions sont $y(t) = \frac{1}{3}e^{2t} + (At + B)e^{-t}$, $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.
4. $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = e^{-t}$.
   $\Delta = 0$, -1 est solution de l'équation caractéristique,
   les solutions sont $y(t) = \frac{t^2}{2}e^{-t} + (At + B)e^{-t}$, $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.

2.7 Développements en séries entières

Seuls les développements les plus utilisés sont rappelés ici. Sont explicités, les développements en série entière de la fonction correspondant au membre de gauche de l'égalite et le rayon R de convergence est précisé.

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad , \quad R = +\infty \quad .$$

$$cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad , \quad R = +\infty \quad .$$

$$sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!} \quad , \quad R = +\infty \quad .$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad , \quad R = 1 \quad .$$

$$ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!} \quad , \quad R = 1, \text{ vrai en } 1 \quad .$$

$$ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!} \quad , \quad R = 1, \text{ vrai en } -1 \quad .$$

$$arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)} \quad , \quad R = 1, \text{ vrai en } 1 \quad .$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \quad , \quad R = 1 \quad .$$

Produit de Cauchy de deux séries entières

Définition 20 *Soit $\sum a_n z_n$ et $\sum b_n z_n$ deux séries entières de rayon R. Alors le produit de Cauchy est $\sum c_n z_n = (\sum a_n z_n \times \sum b_n z_n)$ est de rayon R avec*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \; .$$

Chapitre 3

Quelques rappels sur les espaces vectoriels et l'algèbre linéaire

3.1 Réduction d'endomorphisme, déterminant, valeurs propres, vecteurs propres

3.1.1 Notation, problématique matricielle

Nous rappelons ici brièvement les notations utilisés.
E désigne un espace vectoriel de dimension finie n, de base $(e'_i)_{i \in I}$,
F désigne un espace vectoriel de dimension finie p , de base $(f'_j)_{j \in J}$,
f une application linéaire de E dans F dont la matrice relativement aux bases $(e'_i)_{i \in I}$ et $(f'_j)_{j \in J}$ est P. En notation vectorielle en colonne cela signifie que si X est un vecteur de E dont l'image par f est Y , ceux-ci sont liés par la notation matricielle :

$$Y = PX \quad , \text{où } P \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}) \quad .$$

avec

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad .$$

Les besoins mathématiques nécessitent souvent de savoir résoudre :

$$Y = P^n X_0 \quad \text{où} \ ; X_0 \ \text{ est connu} \quad (1)$$

$$Y = PX = 0 \quad \text{où } X \text{ est inconnu} \quad (2)$$

ce qui n'est pas très aisé quand P a n'importe quelle forme.
L'idée est de trouver des bases $(e'_i)_{i \in I}$ et $(f'_j)_{j \in J}$ de E et F telles que la matrice de f relativement à ces bases soit "simple", au mieux diagonale, au pire triangulaire. Avec une telle matrice la résolution des problèmes (1) et (2) devient simple.
Notons P' la matrice de f relativement à ces bases et notons Q_1 la matrice de passage de (e_i) à (e'_i) et Q_2 la matrice de passage de (f_j) à (f'_j). On a :

$$P' = Q_1 P Q_2^{-1} \ .$$

Le plus simple pour le retrouver est de visualiser le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc} E,(e_i) & \xrightarrow[P]{f} & F,(f_j) \\ Id_1 \downarrow Q_1^{-1} & & Id_2 \uparrow Q_2 \\ E,(e_i^{'}) & \xrightarrow[P']{f} & F,(f_j^{'}) \end{array}$$

En suivant le sens des flèches, l'équation en termes d'applications linéaires s'écrit :

$$f = Id_2 \circ f \circ Id_1 \quad ,$$

Ce qui se traduit en termes matriciels par

$$P = Q_2 P' Q_1^{-1} \quad .$$

On se limitera ici au cas $E = F$. Il est donc nécessaire de déterminer P' et Q_1.
Q_1 est la matrice de passage de (e_i) à $(e_i^{'})$: la k-ième colonne donne la valeur de $e_k^{'}$ en fonction des (e_i). C'est la matrice de $Id : E,(e_i^{'}) \longrightarrow (E,(e_i)$. La relation entre les coordonnées d'un vecteur dans $(E,(e_i)$ notées X et les coordonnées du même vecteur dans la base $(e_i^{'})$ notées X' est :

$$X = Q_1 X' \quad .$$

La détermination de P' fait intervenir la notion de **"valeur propre"** et le calcul effectif de ces valeurs fait intervenir la notion de **déterminant**.
La détermination de Q_1 fait intervenir la notion de **"vecteur propre"**.
Intuitivement, pour que P' soit simple, il faut

$$f(e_i') = \lambda e_i' \ \text{ avec } e_i' \neq 0 \ .$$

Autrement dit, $e_i^{'}$ doit être non nul et son image doit être proportionnelle à lui même. C'est la notion de vecteur propre.

3.1.2 Valeurs propres, vecteurs propres

D'où les définitions suivantes :

Définition 21 *Soit E un espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ sur $\mathbb{R}$ et soit u un endomorphisme de E (application linéaire de E dans E). Le réel λ est valeur propre de u ssi :*

$$\exists\ x \neq 0 \ \in \ E \ \ tq\ u(x) = \lambda x \ .$$

On dit alors que x est un vecteur propre associé à λ.
On appelle spectre de u l'ensemble des valeurs propres de u .
Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de u sont deux problèmes de nature différentes.
Trouver le spectre revient à trouver les valeurs λ pour lesquelles l'application $(u - \lambda Id)$ n'est pas injective. Résoudre ce problème nécessite des outils mathématiques : le déterminant et le polynôme caractéristique.
Trouver les vecteurs propres associés à λ revient à exhiber les solutions d'un système linéaire $u(x) = \lambda x$.

3.1.3 Déterminant

La notion de déterminant dérive d'une notion plus vaste, celle des formes n-linéaires alternées d'un espace produit $E_1 \times \ldots \times E_n$ dans un espace vectoriel F.
Le déterminant correspond au cas particulier $E_1 = E_2 = \ldots = E_n$ et $F = K$ où K est un corps, dans la pratique et communément $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$. La définition rigoureuse du déterminant peut sembler complexe. Dans la pratique cela constitue un outil de calcul très puissant, utile dans les problèmes classiques de résolution de systèmes d'équations linéaires par exemple, de détermination de valeurs propres etc.

Définitions et propriétés

Définition 22 *Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit $(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ une base de E. Soit $(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in E^n$. On pose $x_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} e_i$. Typiquement, les x_j sont des vecteurs dont les coordonnées s'expriment par une matrice A. L'application définie par :*

$$\begin{array}{cccc} det_{\mathcal{B}} & E^n & \longrightarrow & K \\ & (x_1,x_2,\ldots,x_n) & \mapsto & \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} s(\sigma) \alpha_{\sigma(1),1} \times \ldots \times \alpha_{\sigma(n),n} \end{array} ,$$

où σ désigne une permutation de $\mathcal{S}_n$ et $s(\sigma)$ sa signature.

Cette définition ne donne pas la façon pratique de calculer le déterminant, mais elle est utile pour démontrer les propriétés du déterminant. Ce sont ces propriétés que nous retiendrons:

1. Un déterminant est n linéaire : $det_{\mathcal{B}}(\lambda x_1,x_2,\ldots,x_n) = \lambda det_{\mathcal{B}}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$
2. Un déterminant est alterné : si 2 colonnes sont proportionnelles, le déterminant est nul.
3. Un déterminant est antisymétrique : il se change en son opposé quand on échange 2 colonnes.
4. Un déterminant ne change pas quand on ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres.
5. Si A est une matrice, $det_{\mathcal{B}}(\lambda A) = \lambda^n det_{\mathcal{B}}(A)$

La calcul effectif du déterminant sera donné ultérieurement, mais les propriétés énoncées ci dessus bien utilisées permettent souvent de simplifier ce calcul. D'autres proprétés importantes se déduisent de la définition :

Proposition 3 *Si f est une forme n-linéaire antisymétrique de E^n vers K ($=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) alors f est proportionnelle à $det_{\mathcal{B}}$ et plus précisément :*

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = f(e_1,e_2,\ldots,e_n)\, det_{\mathcal{B}}(x_1,x_2,\ldots,x_n) \quad .$$

Un corollaire important est le suivant :

Corollaire 4 *Si $\mathcal{B}' = (e'_1,e'_2,\ldots,e'_n)$ est une base de E, alors*

$$det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \times det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1 \quad .$$

Donc si $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ est une base de E, alors $det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0$. Il en résulte le corollaire très important suivant :

Corollaire 5 *Soit* $(x_1, \ldots, x_n)$ *n vecteurs de E. Alors* $(x_1, \ldots, x_n)$ *est libre ssi*

$$\forall \mathcal{B} \text{ base de } E \text{ , } det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0 \quad .$$

Démonstration

Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est liée alors x_k par exemple est combinaison linéaire des autres vecteurs. Donc le déterminant $det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$.
Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre alors c'est une base $\mathcal{B}'$ de E et $det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0$ ■

Il en résulte le corollaire fondamental suivant :

Corollaire 6 *Soit A une matrice de* $\mathcal{M}_n(K)$*. Alors :*

$$A \text{ est inversible } \Leftrightarrow det A \neq 0 \quad .$$

Démonstration

Soit u une application linéaire de E dans E et $\mathcal{B}$ une base de E telle que A soit la matrice de u relativement à $\mathcal{B}$. Alors :

$$det(A) = det_{\mathcal{B}}(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n)) \quad .$$

Or A inversible $\Leftrightarrow$ u automorphisme .
$\Leftrightarrow$ $(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n))$ libre. ■

Par ailleurs, le déterminant possède des propriétés très utiles pour le calcul.

Proposition 4 $det(A) = det({}^tA) \quad .$

On ne change pas le déterminant en inversant les lignes et les colonnes et toutes les propriétés énoncées sur les colonnes de A sont donc valables pour les lignes.

Proposition 5 $det(AB) = det(A)det(B) \quad .$

Corollaire 7 *Soit A la matrice d'une application linéaire u relativement à une base* $\mathcal{B}$ *et B la matrice de u relativement à une autre base* $\mathcal{B}'$*. Alors* $det(A) = det(B)$*.*

Démonstration

Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Alors :

$$B = P^{-1}AP \quad .$$

Donc ,

$$det(B) = det(P^{-1})det(A)det(P) \quad .$$

Or, $det(P^{-1})det(P) = 1$ (d'après corollaire 4) d'où $det(B) = det(A)$ ■

Définition 23 *Toutes les matrices de u par rapport à des bases différentes quelconques ont le même déterminant. On l'appelle* $det(u)$*.*

Calcul effectif

Il existe bien sûr un algorithme pratique pour calculer le déterminant d'une matrice donnée. Néanmoins, avant de se lancer dans des calculs, il est recommandé d'exploiter toutes les propriétés du déterminant. Cela peut éviter bien des calculs inutiles.
L'algorithme nécessite la définition suivante:

Définition 24 *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(K)$. On note A_{ij} la matrice extraite de A par suppression de la i-ème ligne et de la j-ème colonne. On appelle cofacteur d'indice (i,j) et on note Δ_{ij} l'expression*

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} det(A_{ij}) \quad .$$

Un théorème permet alors de montrer le résultat suivant :

Théorème 32 $\forall\, j \in \{1,n\}$ *on a :*

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \Delta_{ij} \quad ,$$

qui correspond au développement selon la j-ème colonne.
$\forall\, i \in \{1,n\}$ *on a :*

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \Delta_{ij} \quad ,$$

qui correspond au développement selon la i-ème ligne.

Que dit ce théorème? Que le calcul effectif du déterminant d'une matrice A d'ordre n se calcule comme la combinaison linéaire de n déterminants d'ordre $n-1$ affectés de coefficients extraits de la matrice A. Cett formulation se prete typiquement à l'écriture d'une procédure récursive du calcul de déterminant. Examinons ce que cela donne pour $n = 1$, $n = 2$ ou $n = 3$. Qaund il n'y a pas d'ambiguité, le déterminant se note aussi $|A|$.

$$n = 1 \ , \quad A = (a) \ , \quad det(A) = a \quad .$$

$$n = 2 \ , \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ , \quad det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ab - cd \quad .$$

$$n = 3 \ , \quad A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \ , \quad det(A) = a \begin{vmatrix} a & f \\ h & i \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \quad .$$

Dans le cas du dernier déterminant nous avons développé selon la première colonne. Nous aurions pu aussi développer selon la deuxième ou la troisième, ou selon les lignes. Le choix de la ligne ou de la colonne n'est pas anodin et complique ou facilite les calculs....
Mais un développement formel est plus fastidieux à faire que dans un cas concret. Bien souvent, il faut choisir la ligne ou la colonne ayant le maximum de zéros.

Application au calcul de l'inverse d'une matrice

Nous avons défini dans la définition 24 le cofacteur. La matrice C défini à partir de la matrice A par $C = (\Delta_{ij})$ s'appelle la comatrice de A. Cette comatrice peut être utile (mais il y a aussi d'autres méthodes) pour calculer l'inverse d'une matrice grâce au théorème suivant :

Théorème 33 *Si $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est inversible, alors :*

$$A^{-1} = \frac{{}^tC}{det(A)} \quad .$$

Exemple : Soit A une matrice d'ordre 2.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ , \quad A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad .$$

3.1.4 Polynôme caractéristique

L'idée pour déterminer le spectre de u est de chercher un polynôme P à coefficients réels de degré n tel que toute valeur propre λ soit solution de $P(\lambda) = 0$. Le problème est alors simple pour $n \leq 4$. Pour $n \geq 5$ il faudra, sauf cas particulier facile, trouver des algorithmes numériques.

Définition 25 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle polynôme caractéristique de A et on note $p_A(X)$ le polynôme*

$$p_A(X) = det(A - XI_n) \ .$$

Ce polynôme est de degré n et on montre

$$p_A(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} tr(A) X^{n-1} + \ldots + det(A) \ .$$

Le premier problème est de savoir si ce polynôme est spécifique au choix de la matrice A (qui représente u dans une certaine base) ou spécifique à u. La réponse est donnée par le théorème suivant :

Théorème 34 *Deux matrices semblables A et B (telles que $B = PAP^{-1}$) ont le même polynôme caractéristique.*

Corollaire 8 *Deux matrices semblables ont la même trace.*
L'introduction du polynôme caractéristique se justifie par le théorème suivant:

Théorème 35 *λ est valeur propre de u ssi λ est racine de $P_u(X)$.*

Corollaire 9 *Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E. Alors u possède au plus n valeurs propres.*

L'idée étant de trouver une base dans laquelle l'expression de la matrice est simple, nous sommes ramenés à chercher des conditions sur P_u pour lesquelles on sait exhiber une forme simple de P'.

3.1.5 Endomorphismes diagonalisables

La forme la plus simple que l'on puise espérer pour P' est la forme diagonale. D'où la définition suivante:

Définition 26 *Un endomorphisme u de E est diagonalisable ssi il existe une base de E par rapport à laquelle la matrice de u est diagonale.*

Dans ce cas il existe une base de E formée de vecteurs propres de u et le polynôme P_u est de la forme :

$$P_u(X) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - X) \quad ,$$

D'où la définition :

Définition 27 *Soit P un polynôme à coefficients réels. P est dit scindé sur $\mathbb{R}$ ssi*

$$\exists\ (\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n \quad tq\ P(X) = (\lambda_i - X) \quad .$$

La proposition suivante est alors immédiate:

Proposition 6 *si u est diagonalisable alors P_u est scindé.*

Qu'en est-il de la réciproque, en particulier dans le cas où toutes les valeurs propres sont distinctes. Une réponse est partiellement donnée par le théorème suivant :

Théorème 36 *Soit u un endomorphisme de E. Soient $x_1,x_2,\ldots,x_p$ des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes $(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p)$. Alors la famille $(x_1,x_2,\ldots,x_p)$ est libre.*

Corollaire 10 *Si P_u admet n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{R}$, u est diagonalisable.*

Que se passe t-il si certaines racines de P_u sont multiples? Le problème nécessite l'introduction d'une notion supplémentaire.

Définition 28 *Soit u un endomorphisme de E et λ une valeur propre de u. On appelle espace propre associé à λ l'ensemble : $E_\lambda = \{x \mid u(x) = \lambda x\}$.*

On a alors la proposition suivante :

Proposition 7 *Soient $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p$ des valeurs propres distinctes associées aux espaces propres $E_{\lambda_1},E_{\lambda_2},\ldots,E_{\lambda_p}$. Alors la somme $E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \ldots + E_{\lambda_p}$ est directe.*

Le cas intéressant est celui où cette somme vaut E; On a alors la proposition suivante:

Proposition 8 *Soient $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p$ toutes les valeurs propres distinctes de u associées aux espaces propres $E_{\lambda_1},E_{\lambda_2},\ldots,E_{\lambda_p}$. Soit $s_i = dimE_{\lambda_i}$ la dimension de l' espace propre E_{λ_i}.Alors u est diagonalisable ssi $\sum_{i=1}^{p} s_i = n$.*

En fait il existe une relation plus forte entre la dimension de E_{λ_i} et l'ordre de multiplicité de λ_i dans le polynôme P_u. Cette relation est précisée dans le théorème suivant :

Théorème 37 *Soient $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p$ toutes les valeurs propres distinctes de u associées aux espaces propres $E_{\lambda_1},E_{\lambda_2},\ldots,E_{\lambda_p}$ et soit α_i l'ordre de multiplicité de λ_i dans le polynôme P_u. Alors*
$dimE_{\lambda_i} \leq \alpha_i$,
u est diagonalisable ssi P_u est scindé et $\forall i \in \{1,\ldots,p\}$,$dimE_{\lambda_i} = \alpha_i$.

Que se passe t'il si P_u est scindé mais que $dimE_{\lambda_i} < \alpha_i$? La réponse est donnée dans la section 3.1.6.

3.1.6 Endomorphismes trigonalisables

Définition 29 *Un endomorphisme u de E est trigonalisable ssi il existe une base de E par rapport à laquelle la matrice de u à coefficients réels est triangulaire supérieure.*

Le résultat final important de ce rappel s'énonce avec le théorème suivant :

Théorème 38 *L'endomorphisme u de E est trigonalisable ssi P_u est scindé dans $\mathbb{R}$.*

3.2 Espaces vectoriels normés

Sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$, nous savons construire une valeur qui traduise la grandeur d'un élément ou la distance d'un élément à un autre. Pour généraliser cette notion à d'autres espaces ($\mathbb{R}^n$, espace des matrices, des fonctions), il faut formaliser et caractériser ces notions intuitives pour $\mathbb{R}$. D'où la notion de norme et celle de distance.

3.2.1 Normes et distances

Définition 30 *Soit E un espace vectoriel sur $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$. On appelle norme sur E toute application N,*

$$\begin{array}{rccc} N: & E & \to & \mathbb{R}_+ \\ & x & \mapsto & N(x) = \|x\| \end{array}$$

telle que

1. $\forall\, x \in E$, $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2. $\forall\, \lambda \in K, \forall\, x \in E$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$

3. $\forall\, (x,y) \in E^2$, $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$

Exemples :

- Soit $E = \mathbb{R}^n$ et $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$.
  $N_1(x) = \sum_{i=1}^n |x_i| = \|x\|_1$
  $N_2(x) = (\sum_{i=1}^n |x_i|^2)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_2$
  $N_\infty(x) = \sup_{i\in\{1,\ldots,n\}} |x_i| = \|x\|_\infty$

- Soit $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.
  $N_1(f) = \int_a^b |f(x)|dx = \|f\|_1$
  $N_2(f) = (\int_a^b |f(x)|^2)dx^{\frac{1}{2}} = \|f\|_2$
  $N_\infty(f) = \sup_{[a,b]} |f(x)| = \|f\|_\infty$

- Pour l'espace des matrices voir section 3.3.

Définition 31 *Une application d de $E \times E \to \mathbb{R}_+$ est une distance ssi elle vérifie :*

1. $\forall\ (x,y) \in E^2$, $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\forall\ (x,y) \in E^2$, $d(x,y) = d(y,x)$
3. $\forall\ (x,y,z) \in E^3$, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Proposition 9 *Soit (E,N) un espace vectoriel normé. L'application :*

$$\begin{array}{llll} d & E \times E & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & d(x,y) = N(y-x) \end{array}$$

est une distance.

Les notions connues d'intervalles ouverts et fermés de $\mathbb{R}$ sont généralisées dans un espace vectoriel normé.

Définition 32 *Soit (E,N) un espace vectoriel normé associé à une distance d. On appelle boule ouverte de centre a et de rayon r (resp fermée) et on note $\mathfrak{B}(a,r)$ (resp $\mathfrak{B}_f(a,r)$) les ensembles :*

$$\mathfrak{B}(a,r) = \{\ x \in E\ ,\ d(a,x) < r\} \quad ,$$

$$\mathfrak{B}_f(a,r) = \{\ x \in E\ ,\ d(a,x) \leq r\} \quad .$$

Définition 33 *On appelle vecteur unitaire de E tout élément tel que $N(x) = 1$.*

Proposition 10 *Soit (E,N) un espace vectoriel normé. Soit $x \in E\backslash\{0\}$. Alors $\frac{x}{N(x)}$ est un vecteur unitaire.*

Ce résultat semble banal et évident, mais son utilisation pratique est fréquente.
Comme dans $\mathbb{R}$, nous souhaitons analyser le comportement de suites d'éléments de E et comme pour $\mathbb{R}$, nous aurons besoin de la notion de partie bornée.

Définition 34 *Soit (E,N) un espace vectoriel normé et A une partie de E. On dit que A est bornée ssi $\exists\, M \mid \forall\, (x,y) \in A \times A, d(x,y) < M$.*

Définition 35 *Soit A une partie bornée d'un espace vectoriel normé E. On appelle diamètre de A et on note $\delta(A)$ la quantité :*

$$\delta(A) = \sup_{(x,y)\in A\times A} d(x,y) \quad .$$

Définition 36 *Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. Soit $x \in E$. On appelle distance de x à A la valeur notée $d(x,A)$,*

$$d(x,A) = \inf_{y\in A} d(x,y) \quad .$$

3.2.2 Suites d'éléments d'un espace normé

Définition 37 *On appelle suite d'éléments d'un espace E une application :*

$$\begin{array}{rccc} u: & \mathbb{N} & \to & E \\ & n & \mapsto & u_n \end{array} .$$

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cette suite.

La notion essentielle est celle de convergence. Elle correspond à l'idée intuitive qui dit que à partir d'un certain rang, les termes de la suite sont aussi proches que l'on veut d'un élément l de E. Mathématiquement, cela se traduit par la définition suivante:

Définition 38 *Soit (E,N) un espace vectoriel normé. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente au sens de N vers l ssi*

$$\forall\, \epsilon > 0 \;\; \exists\, n_o \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0 \;, N(u_n - l) < \epsilon \quad .$$

Cette limite semble dépendre fortement du choix de la norme N. Que se passe t-il quand on change de normes? Ceci nous conduira à la notion de normes équivalentes.

Théorème 39 *Soit (E,N) un evn, N' une autre norme sur E. Pour que toute suite convergeant vers 0 au sens de N converge aussi vers 0 au sens de N', il faut et il suffit que*

$$\exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+^* \; tq \, \forall\, x \in E \;, N'(x) < \alpha N(x) \quad .$$

On note alors $N' < \alpha N$.

Pour que l'étude d'une suite selon une norme suffise pour en déduire son comportement selon une autre norme, il faut donc que cette inégalité soit vraie dans les deux sens ce qui correspond à la notion de suites équivaentes.

Définition 39 *Soient N et N' deux normes sur E. Les normes N et N' sont dites équivalentes ssi* $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+ , \beta \in \mathbb{R}_+ \mid \beta N \leq N' \leq \alpha N$.

Exemples :

1. Sur $\mathbb{R}^n$, on a :
$$N_\infty(x) \leq N_1(x) \leq \sqrt{n} N_2(x) \leq n N_\infty(x) \quad ,$$
donc toutes ces normes sont équivalentes. Plus généralement, on verra au chapitre 4.3 que dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.
2. Sur $\mathcal{C}([0,1] \to \mathbb{R}$ on a :
$$N_1(f) \leq N_\infty(f) \quad .$$
Réciproquement, supposons $N_\infty(f) \leq \alpha N_1(f)$. Alors, toute suite de points de E convergeant vers 0 au sens de N_1 devrait tendre vers 0 au sens de N_∞.
Or ceci est faux comme le montre le contre-exemple suivant:
Prenons $f_n(x) = x^n$. Alors $N_1(f_n) = \frac{1}{n+1} \to 0$, tandis que $N_\infty(f_n) = 1$ ne tend pas vers 0, donc ces normes ne sont pas équivalentes. ■

Proposition 11 *Soit (E,N) un espace vectoriel normé. Toute suite convergente au sens de N est bornée au sens de N.*

La réciproque est fausse mais les suites bornées de E méritent une attention particulière et une notation : $\mathfrak{L}_\infty(E)$.

Proposition 12 $\mathfrak{L}_\infty(E)$ *est un espace vectoriel que l'on munit de la norme* $N_\infty(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|$.

Il est assez fréquent que E soit, comme $\mathbb{R}^n$, un espace vectoriel produit. Définir une norme sur un espace produit peut se faire, comme sur $\mathbb{R}^n$, de plusieurs façons. Néamoins, l'une d'elles est privilégiée.

Définition 40 *Soient $(E_1,N_1), \ldots (E_p,N_p)$ p espaces vectoriels normés. On définit $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p$ dit espace produit, l'espace dont les éléments sont les p-uples:*

$$E = \{x = (x_1,x_2, \ldots ,x_p) \mid \forall i \in \{1..p\}, x_i \in E_i\} \quad .$$

Proposition 13 *Soit N l'application :*
$$N : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}_+ \\ x = (x_1, \ldots ,x_p) & \mapsto & \sup_{i\in\{1..p\}} N_i(x_i) \end{array}$$
, alors (E,N) est un espace vectoriel normé.

Nous sommes alors en mesure de définir la limite d'une suite de points de E.

Définition 41 *Soit $E = \prod_{i=1}^{p} E_i$ où (E_i,N_i) sont des espaces vectoriels normés. Une suite de E, $u_n = (u_n^1,u_n^2,\ldots,u_n^p)$ converge vers $l = (l^1,l^2,\ldots,l^p)$ ssi $\forall i \in \{1..p\}, \lim_{n\to+\infty} u_n = l^i$.*

Ceci revient donc à prendre la limite, composante par composante.

Il est parfois complexe d'étudier une suite et il est parfois utile de n'étudier que des sous suites , l'exemple $u_n = (-1)^n$ permet de s'en convaincre. Pour cette suite, la sous suite des éléments de rang pair prend une valeur constante égale à 1 et la sous suite des éléments de rang impair prend une valeur constante égale à -1. Il est donc intuitif de penser que cette suite ne converge pas. Pour formaliser cette intuition il faut définir la notion de suites extraites.

Définition 42 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Une suite extraite est définie par la donnée d'une application*
$\begin{array}{cccc} \varphi & \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & n & \mapsto & \varphi(n) \end{array}$ *, croissante. La suite extraite est la suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Elle s'obtient par la composition des applications :*

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{N} & \to^{\varphi} & \mathbb{N} & \to^{u} & E \\ n & \mapsto & \varphi(n) & \mapsto & u_{\varphi(n)} \end{array}$$

Exemple : la suite des éléments de rangs pairs (u_{2n}) correspond à $\varphi : n \mapsto 2n$.

Une propriété importante de la limite d'une suite selon N est l'unicité de cette limite.

Proposition 14 *Soit (E,N) un espace vectoriel normé. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n$ existe, alors cette limite est unique.*

Démonstration

Raisonnons par l'absurde et supposons $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = l'$ et $l \neq l'$.

Prenons $r = N(l - l') = d(l,l'$. Alors $r > 0$. Donc, par def de la limite,

$$\exists\, n_0 \mid \forall n \geq n_0,\, d(u_n,l) < \frac{r}{3} \quad ,$$

$$\exists\, n_1 \mid \forall n \geq n_1,\, d(u_n,l') < \frac{r}{3} \quad .$$

Posons $n_2 = sup(n_0,n_1)$. Alors

$$\forall\, n \geq n_2 \,,\, u_n \in \mathfrak{B}(l,\frac{r}{3}) \bigcap \mathfrak{B}(l',\frac{r}{3}) \quad .$$

D'où $u_n \in \emptyset$ par def de r. D'où une contradiction. ■

Proposition 15 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de E vers l. Alors toute suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et a pour limite l.*

Corollaire 11 *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet des suites extraites ayant des limites différentes dans E, alors cette suite diverge.*
Exemple : $u_n = (-1)^n$. On a $\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = -1$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

3.2.3 Séries d'éléments d'un espace vectoriel normé

Définition 43 *On appelle série, et on note $\sum u_n$ associée à une suite (u_n) d'éléments de E, la suite de E dont le terme général est $S_p = \sum_0^p u_n$.*

Exemple : $S_p = \sum_0^p A^n$ où A est une matrice.

Définition 44 *Si la limite $l = \lim_{p\to+\infty} S_p$ existe, on dit que $\sum u_n$ est convergente et on note $l = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Si l n'existe pas, on dit que $\sum u_n$ est divergente.*
Exemple : $\sum A^n$ où A est une matrice est cv ssi $\|A\| < 1$. (voir les normes matricielles à la section 3.3) L'ensemble des suites ou des séries convergentes possèdent des propriétés structurelles:

Proposition 16 *L'ensemble des suites convergentes d'un espace vectoriel normé est un espace vectoriel et de même, l'ensemble des séries convergentes d'un espace vectoriel normé est un espace vectoriel.*

3.3 Rappel sur les normes matricielles

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie n^2 sur $\mathbb{R}$. Toutes les normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont équivalentes. Posons :

$$I = \{1,\ldots,n\} \quad . \quad M = (a_{ij})_{(i,j)\in I^2} \quad .$$

$$\|M\|_\infty = \sup_{(i,j)\in I^2} |a_{ij}| \quad ,$$

$$\|M\|_1 = \sum_{(i,j)\in I^2} |a_{ij}| = \sum_{i\in I}\sum_{j\in I} |a_{ij}| \quad ,$$

$$\|M\|_2 = \left(\sum_{(i,j)\in I^2} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in I} |a_{ij}| \quad ,$$

On peut parfois se contenter de parler de $\|M\|$ puisque toutes les normes sont équivalentes. Mais le plus souvent on prend les normes induites de $\mathbb{R}^P$.
Ces normes induites ont la proriété d'être sous-multicaplicatives, autrement dit elles vérifient :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ , \ \|A.B\| \leq \|A\|.\|B\| \quad .$$

On peut citer comme norme induite de $\mathbb{R}^n$, les normes infinies ou euclidiennes avec les notations et définitions suivantes : Posons :

$$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}_{i \in I}$$

où L_i est un élément de $\mathbb{R}_n$ désignant le i-ième vecteur ligne de A. On a alors:

$$N_{inf}(A) = \max_{i \in I} \|L_i\|_\infty \text{ où } \|L_i\|_\infty = \max_{j \in I} |a_{ij}| \quad .$$

$$N_{eucl}(A) = \max_{i \in I} \|L_i\|_2 \text{ où } \|L_i\|_2 = \left(\sum_{j \in I} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \quad .$$

Chapitre 4

Pour aller plus loin...Topologie

4.1 Topologie d'un espace vectoriel normé

Le problème ici est de définir des outils qui permettent de définir et de caractériser des fonctions continues d'un espace vectoriel sur un autre espace vectoriel. Ces outils font appel à la notion de topologie. C'est une théorie très puissante mais difficile à appréhender. Dans un premier temps, l'idée est de caractériser formellement la notion intuitive de voisinage.

Définition 45 *Soit* (E,N) *un espace vectoriel normé. Soit* $x \in E$*. Soit* $V \subset E$*.* V *est dit être un voisinage de* x *ssi* $\exists r > 0$*,* $\mathcal{B}(x,r) \subset V$*. On note alors* $V \in \mathcal{V}(x)$*.*
Les parties de E qui vont être voisinage de chacun de leur point vont jouer un rôle fondamental. Dans $\mathbb{R}$ les intervalles $]a,b[$ dits ouverts vérifient cette propriété. D'où la notion d'ouverts et de fermés.

Définition 46 *Soit* (E,N) *un espace vectoriel normé. Soit* $O \subset \mathcal{P}(E)$*.* O *est dit ouvert ssi il est voisinage de chacun de ses points,* i.e.

$$\forall x \in O \;, \exists\, r > 0 \; tq\, \mathcal{B}(x,r) \subset O \quad .$$

Dans toute la suite, $\overline{F}$ désigne le complémentaire de F dans E.

Définition 47 *Soit* $F \subset \mathcal{P}(E)$*.* F *est dit fermé ssi* $\overline{F}$ *est un ouvert.*
On peut vérifier que la famille des ouverts d'un evn vérifie les trois propriétés suivantes. Dans la théorie, ce sont ces propriétés qui caractérisent une "topologie".

Proposition 17 *On a:*

1. $\emptyset$ *et* E *sont des ouverts.*
2. *si* $(O_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *est une famille d'ouverts,* $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} O_i$ *est ouvert.*
3. *si* $(O_i)_{i\in\{1..n\}}$ *est une famille d'ouverts,* $\bigcap_{i=1}^{n} O_i$ *est ouvert.*

Démonstration

1. $\emptyset$ et E sont des ouverts est évident.

2. Posons $O = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} O_i$. Soit $x \in O$. Alors, $\exists i \in \mathbb{N}$ tq $x \in O_i$. Or O_i est ouvert. Donc $\exists\, r > 0$ tq $\mathcal{B}(x,r) \subset O_i \subset O$.
3. Posons $O = \bigcap_{i=1}^{n} O_i$. Soit $x \in O$. Alors, $\forall\, i \in \{1..n\}$ tq $x \in O_i$. Or O_i est ouvert. Donc $\exists\, r_i > 0$ tq $\mathcal{B}(x,r_i) \subset O_i \subset O$. Posons $r = \inf_{i\in\{1..n\}} r_i$. Alors $\forall\, i \in \{1..n\}\mathcal{B}(x,r) \subset O_i \subset O$. ∎

Corollaire 12 *On a:*

1. $\emptyset$ et E sont des fermés.

2. si $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille de fermés, $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} F_i$ est fermé.

3. si $(F_i)_{i\in\{1..n\}}$ est une famille de fermés, $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ est fermé.

Dans $\mathbb{R}$ soit l'intervalle $I = [a,b[$. Il est relativement aisé d'identifier le plus grand ouvert contenu dans I, c'est $]a,b[$, et le plus petit fermé contenant I, c'est $[a,b]$.
Pour un evn quelconque, la caractérisation de ces notions demande plus de soins et de théorie. Elle nécessite notamment l'introduction des notions d'adhérence et de points adhérents.

Définition 48 *Soit E un evn, $A \subset E$. Un point x est dit point adhérent de A ssi $\forall\, V \in \mathcal{V}(x)$, $V \cap A \neq \emptyset$.*

Définition 49 *On appelle adhérence de A et on note $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents de A. Donc*

$$\overline{A} = \{x \in E \ tq \ \forall\, V \in \mathcal{V}(x)\ ,\ V \cap A \neq \emptyset\}\ .$$

Cet ensemble est particulier et vérifie le théorème suivant :

Théorème 40 *$\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.*

Démonstration

Cette démonstration se fait en trois temps.

- On a $A \subset \overline{A}$.
  En effet, si $x \in A$ alors $\forall\, V \in \mathcal{V}(x)$, $\{x\} \subset V \cap A$ donc $V \cap A \neq \emptyset$, donc $x \in \overline{A}$.
- $\overline{A}$ est un fermé.
  Pour cela il faut en fait montrer que $\complement_E \overline{A}$ est un ouvert, *i.e.*
  $\forall\, x \in O$, $\exists\, r > 0, \mathcal{B}(x,r) \subset O$.
  Soit $x \in O$. Alors $x \notin \overline{A}$, donc $\exists\, V \in \mathcal{V}(x) \mid V \cap A = \emptyset$.
  Or, $\exists\, r > 0 \mid \mathcal{B}(x,r) \subset V$. Donc $\mathcal{B}(x,r) \cap A = \emptyset$.
  Il faut en fait montrer $\mathcal{B}(x,r) \subset O$ *i.e.* $\mathcal{B}(x,r) \cap \overline{A} = \emptyset$.
  Soit $y \in \mathcal{B}(x,r)$ Posons $r_y = r - d(x,y)$. D'après l'inégalité triangulaire,

$$\mathcal{B}(y,r_y) \subset \mathcal{B}(x,r)\ ,$$

$$\text{donc}\ \ \mathcal{B}(y,r_y) \cap A = \emptyset \quad .$$

En d'autres termes, y a un voisinage qui ne rencontre pas A. Donc $y \notin \overline{A}$ donc $y \in O$.
Par suite, $\mathcal{B}(x,r) \cap \overline{A} = \emptyset$ donc $\overline{A}$ est fermé.

– $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.
Supposons $A \subset B \subset\neq \overline{A}$ et B fermé et montrons que l'on obtient une contradiction. Pour cela il faut démontrer deux lemmes:

Lemme 1 *$A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.*

Démonstration

Soit $x \in \overline{A}$, montrons $x \in \overline{B}$.
On a $\forall\ V \in \mathcal{V}(x)$, $V \cap A = \emptyset$,
or $A \subset B$ donc $V \cap A \subset V \cap B$, donc $V \cap B \neq \emptyset$ donc $x \in \overline{B}$. ∎

Lemme 2 *A fermée $\Leftrightarrow \overline{A} = A$.*

Démonstration

Montrons $\Leftarrow$
Si $\overline{A} = A$, comme $\overline{A}$ est fermé, A l'est aussi.
Montrons $\Rightarrow$
Si A est fermée, alors son complémentaire $O = \complement_E A$ est un ouvert. On sait que $A \subset \overline{A}$. Supposons $\exists\ x \in \overline{A} \backslash A$. Alors $x \in O$ et O est ouvert.
Donc $\exists\ V \in \mathcal{V}(x)$ tq $V \subset O$ et donc $V \cap A = \emptyset$. Donx $x \notin \overline{A}$ (par def. de $\overline{A}$). Donc $A = \overline{A}$ ∎

En appliquant les deux lemmes, on obtient $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ et $\overline{A} \subset \overline{B} = B \subset \overline{A}$, donc $B = \overline{A}$ ce qui est absurde avec l'hypothèse. ∎

Par analogie, on définit l'intérieur $\mathring{A}$ de A.

Définition 50 *On appelle intérieur de A et on note $\mathring{A}$ le plus grand ouvert contenu dans A.*

Les propriétés suivantes sont aisément vérifiées.

Proposition 18 *On a les propriétés suivantes :*
$\mathring{A} \subset A$,
$A \subset B \ \Rightarrow \mathring{A} \subset B$,
A ouvert $\Leftrightarrow \mathring{A} = A$

Intérieur et adhérence ont un lien direct avec ouverts et fermés :

Proposition 19 *Les boules ouvertes et fermées vérifient les propriétés suivantes*
La boule $\mathcal{B}(x_0,r)$ est un ouvert de E.
La boule $\mathcal{B}_f(x_0,r)$ est un fermé de E.

Intérieur et adhérence d'une partie de E sont liés par la proposition suivante:

Proposition 20

$$\complement_E \mathring{A} = \overline{\complement_E A}$$

La caractérisation par les suites d'une partie fermée est souvent utile en analyse.

Théorème 41 *Une partie A de E est fermée ssi les limites des suites convergentes de points de A appartiennent à A.*

Démonstration

Montrons $\Rightarrow$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de A, tq $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$. Montrons $l \in \overline{A} = A$. On a

$$\forall\, V \in \mathcal{V}(l), \exists\, n_0 \mid \forall n \geq n_0, u_n \in V\ .$$

Donc $\forall\, V \in \mathcal{V}(l)$, $V \cap A \neq \emptyset$, donc $l \in \overline{A} = A$.
Montrons $\Leftarrow$.
Montrons $\overline{A} = A$. Soit $x \in \overline{A}$. La famille $\mathcal{B}(x,\frac{1}{n})$ est une suite de voisinages ouverts de x. Donc:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*\ , \mathcal{B}(x,\frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset\ ,$$

donc

$$\exists\, u_n \in \mathcal{B}(x,\frac{1}{n}) \cap A \quad .$$

Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de A qui converge vers x, donc $x \in A$.

■

Être limite d'une suite de points de A d'une partie A d'un espace vectoriel est une des propiétés fondamentales en mathématique. D'où la définition suivante:

Définition 51 *A est dite dense dans E ssi $\overline{A} = E$.*

Ceci signifie que tout élément de E est limite d'une suite d'éléments de A.

4.1.1 Étude locale d'une application : limite, continuité

Limite

Définition 52 *Soient (E,N) et (F,N') deux espaces vectoriels normés, et $f : E \to F$. Soit $b \in F$ et $a \in E$. On dit que f admet b comme limite en a ssi*

$$\forall\, V \in \mathcal{V}(b)\ , \exists\, U \in \mathcal{V}(a)\ tq\ f(U) \subset V \quad .$$

Comme pour la limite d'une suite dans un espace vectoriel normé, cette limite, si elle existe, est unique. On note $\lim_{x\to a} f = b$.

Écrivons cette définition dans les cas particuliers suivants :
$f : \mathbb{R} \to E$.

$$\lim_{+\infty} = b \Leftrightarrow \forall\, V \in \mathcal{V}(b) \;,\; \exists\, A > 0 \text{ tq } \forall x > A \;,\; f(x) \in V \quad .$$

$$\lim_{-\infty} = b \Leftrightarrow \forall\, V \in \mathcal{V}(b) \;,\; \exists\, A < 0 \text{ tq } \forall x < A \;,\; f(x) \in V \quad .$$

$f : E \to \mathbb{R}$.

$$\lim_{a} = +\infty \Leftrightarrow \forall\, A > 0 \;,\; \exists U \in \mathcal{V}(a) \text{ tq } \forall\, x \in U, f(x) > A \quad .$$

$$\lim_{a} = -\infty \Leftrightarrow \forall\, A < 0 \;,\; \exists U \in \mathcal{V}(a) \text{ tq } \forall\, x \in U, f(x) < A \quad .$$

Les opérations algébriques sur les limites se passent “bien” et on obtient les propriétés suivantes :

Proposition 21
$\lim_{x\to a} = b \;\Rightarrow\; \lim_{x\to a} \lambda f = \lambda b$.
$\lim_{x\to a} f = b_1, \lim_{x\to a} g = b_2 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to a}(f+g) = b_1 + b_2$.

Avec trois espaces vectoriels, on obtient la propriété de composition suivante:
Proposition 22
$\lim_{x\to a} f = b \;,\; \lim_b g = l \;\Rightarrow \lim_{x\to a}(g \circ f) = l$.

Continuité

Définition 53 *Soient (E,N) et (F,N') deux espaces vectoriels normés, et $f : E \to F$. Soit $x_0 \in E$. On dit que f est continue en x_0 ssi*

$$\forall\, W \in \mathcal{V}(f(x_0)) \;,\; \exists\, U \in \mathcal{V}(x_0) \text{ tq } f(U) \subset W \quad .$$

En termes de boules ouvertes et de distance, cette définition peut s'enoncer ainsi :

$$\forall\, \epsilon > 0 \;,\; \exists\, \alpha \text{ tq } \forall x \in E \;,\; d(x,x_0) < \alpha \Rightarrow\; d(f(x),f(x_0)) < \epsilon \quad .$$

Définition 54 *On dit que f est continue sur E ssi f est continue en chacun des points de E.*
Il est en fait excessivement rare de démontrer la continuité d'une fonction f par la définition 53. Dans la pratique, on utilise soit le théorème 42, soit le théorème 43 soit on montre que f est la combinaison linéaire ou la composition d'applications continues. Le théorème 42 donne une caractérisation de la continuité par les suites. Il est très utile dans les deux sens de son énoncé. Il ne sera pas démontré ici.

Théorème 42 *Soient E et F deux espaces vectoriels normés, et $f : E \to F$, $a \in E$. Alors :*

$$f \text{ est continue en } a \Leftrightarrow \text{ Pour toute suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \;,\; \text{si } \lim_{n\to+\infty} a_n = a \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(a) \quad .$$

Le théorème 43 donne une caractérisation topologique d'une application continue sur E.

Théorème 43 *Soient E et F deux espaces vectoriels normés, et $f : E \to F$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *f est continue sur E.*
2. *$\forall O$ ouvert de F, $f^{-1}(O)$ ouvert de E.*
3. *$\forall F$ fermé de F, $f^{-1}(F)$ fermé de E.*

Proposition 23 *Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$, f continue sur E et g continue sur F. Alors $g \circ f$ est continue sur E.*
Soient $f : E \to F$, $g : E \to F$, et soient $a \in E$ et $\lambda \in K$. Supposons f continue en a et g continue en a . Alors $f + g$ est continue en a et λf est continue en a.

Enfin, il se peut que l'espace d'arrivée F soit un produit d'espaces vectoriels normés. La continuité de ces fonctions se ramène aux cas précédents grâce au théorème suivant :

Théorème 44 *Soit une fonction,*

$$\begin{array}{cccc} f: & E & \to & \prod_{i=1}^n F_i \\ & x & \mapsto & (f_1(x), \ldots, f_n(x)) \end{array}$$

.
Alors f continue $\Leftrightarrow \forall i \in \{1..n\}$, f_i continue.

Démonstration

Montrons $\Rightarrow$
On montre aisément que

$$\begin{array}{cccc} p_i: & \prod_{i=1}^n F_i & \to & F_i \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & x_i \end{array}$$

.
est continue. Or $f_i = p_i \circ f$, donc f et p_i continues $\to f_i$ continue.
Montrons $\Leftarrow$
Ce sens la du théorème se démontre en utilisant la caractérisation par les suites. ■

4.2 Espaces complets

4.2.1 Définitions

Montrer qu'une suite converge n'est pas toujours très aisé car cela suppose de connaitre sa limite. Il est souvent plus facile de montrer que cette suite vérifie le critère de Cauchy donc que à partir d'un certain rang deux termes de la suite sont très proches.

Définition 55 *Soit E un evn et* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de E. La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dit de Cauchy ssi*

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, n_0 \mid \forall p \geq n_0, \forall q \geq n_0, \|u_p - u_q\| < \epsilon\ .$$

Bien sûr le critère de convergence est plus fort que celui de Cauchy au sens de la proposition suivante:

Proposition 24 *Toute suite de convergente dans E est une suite de Cauchy dans E.*
C'et la réciproque qui est délicate et non systématique. Nous avons vu au premier chapitre que une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ ne converge pas nécessairement dans $\mathbb{Q}$. Les espaces "plus agréables" sont ceux pour lequel cette réciproque est vraie.

Définition 56 *Un ensemble E muni d'une distance d est dit complet ssi toute suite de Cauchy d'éléments de E converge dans E.*

Définition 57 *Un evn (associé à une distance d) complet est dit espace de Banach.*

Corollaire 13 *L'ensemble* $\mathbb{Q}$ *n'est pas complet.*
Nous l'avons vu au premier chapitre ceci est la motivation d'une des constructions rigoureuses de $\mathbb{R}$, c'est l'ensemble $\mathbb{Q}$ complété de toutes les limites de suites de Cauchy de $\mathbb{Q}$. Il est alors intuitif de comprendre que cet ensemble est complet.

Théorème 45 *L'ensemble* $\mathbb{R}$ *est complet.*
Ceci est dans la pratique extrêmement utile car il suffit dans $\mathbb{R}$ de montrer qu'une suite est de Cauchy pour montrer qu'elle converge!
Sachant que $\mathbb{R}$ est complet il est alors plus aisé de montrer que d'autres ensembles sont complets.

Théorème 46 *Soit E un espace compet et* $F \subset E$*. Alors F complet* $\Leftrightarrow$ *F fermé.*
Démonstration

Montrons $\Rightarrow$
D'après le théorème 41, il suffit de démontrer que les suites convergentes de points de F convergent dans F.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de F. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy donc converge dans F, car F est complet. ■

Montrons $\Leftarrow$
Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de points de F. Alors $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une suite de Cauchy de points de E. Donc $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y dans E. Donc $y \in \overline{F}$. Or F est fermé. Donc $y \in F$ et par suite F est complet. ■

Proposition 25 *Soit (E,N_1) et (F,N_2) deux evn. L'espace produit $E \times F$ est muni de la norme produit. Alors: E complet, F complet $\Rightarrow$ $E \times F$ complet.*

Démonstration

Soit $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $E \times F$.

$$\text{Soit } \epsilon > 0.\ \exists\, n_0 \mid \forall\, p \geq n_0, \forall\, q \geq n_0, \text{Sup}(N_1(x_p - x_q), N_2(y_p - y_q)) < \epsilon \quad ,$$

Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans E donc converge vers x et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F donc converge vers y. Par suite $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $E\times F$ vers (x,y). ■

Corollaire 14 *Les espaces $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont des espaces complets.*

4.2.2 Applications

Théorème 47 *Dans un espace de Banach E toute série absolument convergente est convergente.*

Démonstration

Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente de E. Alors, par def, $S_n = \sum_{k=0}^{n} \|u_k\|$ est une suite convergente et c'est donc une suite de Cauchy de E.
Posons $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} u_n$ et montrons que (σ_n) est une suite de Cauchy.
Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $p > q$. On a

$$\|\sigma_p - \sigma_q\| = \|u_{q+1} + u_{q+2} + \ldots + u_p\| \quad ,$$

donc d'après l'inégalité triangulaire,

$$\|\sigma_p - \sigma_q\| \leq \|u_{q+1}\| + \|u_{q+2}\| + \ldots + \|u_p\| \quad ,$$

Or S_n de Cauchy signifie que le membre de droite de cette inégalité est aussi petit que l'on veut dès que p et q sont suffisamment grands.
Par suite, σ_n est de Cauchy. Or E est complet, donc (σ_n) converge. ■

Théorème 48 *Soit E un espace métrique ou normé complet. Soit f une fonction contractante de E dans E, i.e.*

$$\exists\, |K| < 1 \mid \forall\, (x,y) \in E^2, d(f(x),f(y)) \leq K d(x,y) \quad .$$

Alors f admet un unique point fixe, solution de $l = f(l)$.

Démonstration

Soit u_0 quelconque dans E, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.
Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy:
D'après l'inégalité triangulaire, on a :

$$d(u_{p+q},u_p) \leq \sum_{j=0}^{q-1} d(u_{p+j},u_{p+j+1})$$

or

$$d(u_{p+j},u_{p+j+1}) \leq k^{p+j} d(u_1,u_0) \ ,$$

donc

$$d(u_{p+q},u_p) \leq \sum_{j=0}^{q-1} k^{p+j} d(u_1,u_0)$$

or

$$\sum_{j=0}^{q-1} k^{p+j} d(u_1,u_0) = k^p \sum_{j=0}^{q-1} k^j d(u_1,u_0) \leq d(u_1,u_0)\frac{k^p}{1-k} \ .$$

or $|k| < 1$ donc $\lim_{p\to+\infty} k^p = 0$.
Par suite, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Or E est complet donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite l. De plus, f contractante donc f est continue et par suite, $(f(u_n))$ a pour limite $f(l)$.
En passant à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$ on obtient donc $f(l) = l$. D'où l'existence du point fixe. Montrons son unicité.
Supposons

$$\exists\ l_1 \mid l_1 = f(l_1) \text{ et} \exists\ l_2 \mid l_2 = f(l_2) \text{ et } l_1 \neq l_2 \ .$$

Alors $d(f(l_1),f(l_2)) \leq kd(l_1,l_2)$
Donc $d(l_1,l_2) \leq kd(l_1,l_2)$. Or $d(l_1,l_2) > 0$. Donc $1 \leq k$, d'où une contradiction avec l'hypothèse. ■

Ce résultat a de nombreuses applications, en algorithmique numérique par exemple.
Une autre notion s'avère extrêmement utile pour les espaces topologiques et plus particulièrement pou les espaces métriques et les evn. C'est la notion d'espace compact. C'est l'outil fondamental qui permet de montrer que dans un evn de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. La définition rigoureuse reste abstraite, mais c'est une notion très utile.

4.3 Espaces compats

4.3.1 Définition, généralités

Définition 58 *Soit E un espace métrique (ou evn) et soit $K \subset E$. K est dite compacte ssi pour toute famille quelconque d'ouverts de E tq*

$$K \subset \bigcup_{i\in I} O_i \quad \textit{alors } \exists J, \textit{ de cardinal fini et } J \subset I \ \textit{ tq } K \subset \bigcup_{i\in J} O_i \quad .$$

Exemple : Tout espace métrique fini est compact.

Théorème 49 *Tout intervalle fermé borné* $[a,b]$ *de* $\mathbb{R}$ *est compact.*
Démonstration

Par l'absurde: Supposons $[a,b]$ non compact. Alors

$$\exists (O_i) telleque [a,b] \subset \bigcup_{i \in I} O_i \text{ et } \forall J, \text{ de cardinal fini et } J \subset I \text{ et } K \neq \bigcup_{i \in J} O_i \quad .$$

On va construire par récurrence des intervalles $I_k = [a_k,b_k]$ tel que

1. $I_{k+1} \subset I_k$, les intervalles sont emboités.
2. $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$, le diamètre tend vers 0.
3. I_k vérifie la propriété dite P_k:

$$I_k \subset \bigcup_{i \in I} O_i \text{ et } \forall J, \text{ de cardinal fini et } J \subset I \ I_k \neq \bigcup_{i \in J} O_i \quad .$$

L'idée conductrice est alors de construire un intervalle I_{n_0} dont on montrera qu'il vérifie $I_{n_0} \subset O_{i_0}$, ce qui contredit la propriété P_{n_0} qu'il est censé vérifier.
Posons $I_0 = [a,b]$. P_0 est vraie par hypothèse.
Supposons les I_k construits pour $k \leq n$ et construisons I_{n+1}.
Alors $[a_n,b_n]$ vérifie P_n. Considérons les deux intervalles $[a_n,\frac{a_n+b_n}{2}]$ et $[\frac{a_n+b_n}{2},b_n]$.
Montrons que l'un de ces deux intervalles vérifie la propriété P_{n+1}:
En effet, si aucun des deux intervalles ne la vérifie, alors,

$$\exists\ J_1 \text{ finie } \subset I \text{ tq } [a_n,\frac{a_n+b_n}{2}] \subset \bigcup_{i \in J_1} O_i \ ,\exists\ J_2 \text{ finie } \subset I \text{ tq } [\frac{a_n+b_n}{2},b_n] \subset \bigcup_{i \in J_2} O_i \ ,$$

On aurait alors

$$[a_n,b_n] \subset \bigcup_{i \in J1 \cup J_2} O_i \text{ , avec } J1 \cup J_2 \text{ finie,}$$

ce qui contredit la propriété P_n que vérifie $[a_n,b_n]$.
On choisit alors I_{n+1} comme étant celui des deux intervalles qui vérifie P_{n+1}.
Par construction, on a donc les propriétés, 1, 2 et 3.
Or, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par b donc elle converge et la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par a donc elle converge. De plus, $b_n - a_n$ converge vers 0, donc $\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} b_n = \alpha$. Les suites sont adjaçentes. On obtient donc,

$$\alpha \in [a,b] \text{ et par hypothèse } [a,b] \subset \bigcup_{i \in I} O_i \ .$$

Donc

$$\exists\ i_0\ \in\ I \text{ tq } \alpha \in O_{i_0}.\text{Or } O_{i_0} \text{ est ouvert.}$$

Donc

$$\exists\ \epsilon > 0 \text{ tq }]\alpha - \epsilon,\alpha + \epsilon[\subset O_{i_0} \quad ,$$

Or $\lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha$. Donc,

$$\exists\ n_0 \mid \forall\ n \geq n_0,\ a_n\ \in]\alpha - \epsilon,\alpha + \epsilon[\quad ,$$

et

$$\exists\ n_1 \mid \forall\ n \geq n_1,\ b_n\ \in]\alpha - \epsilon,\alpha + \epsilon[\quad ,$$

Posons $n_2 = sup(n_0,n_1)$. Alors,

$$\forall\ n \geq n_2,\ [a_n,b_n]\ \in]\alpha - \epsilon,\alpha + \epsilon[\subset 0_{i0} \quad ,$$

ce qui contredit P_n, d'où une contradiction, donc $[a,b]$ est compact.

■

Dans un espace compact, cette définition est équivalente à la propriété dite de Bolzano Weierstrass plus facile à appréhender mais difficile à montrer:

Théorème 50 *Soit (E,d) un espace métrique. Soit $K \subset E$. Alors K compact $\Leftrightarrow$ toute suite d'éléments de K admet une sous suite convergeant dans K.*
Cette propriété permet de montrer les propositions suivantes.

Proposition 26 *Soit (E,d) un espace métrique, A une partie de E. Alors A compacte $\Rightarrow$ A fermée, bornée.*
Démonstration

Montrons A fermée. Soit $x\ \in\ \overline{A}$. Alors $\exists\ (x_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}\ x_n\ \in\ A$ tq $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$. Or A compacte donc d'après la proposition 50, $\exists\ (x_{n_k})_{k\geq1}$ sous suite de $(x_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ telle que $(x_{n_k})_{k\geq1}$ converge dans A.
Or $\lim_{n\to+\infty} x_{n_k} = \lim_{n\to+\infty} x_n = x$, donc $x\ \in\ A$. Donc $A = \overline{A}$, donc A est fermée.
Montrons A bornée.
Par l'absurde, supposons A non borné. Alors, $\forall\ n\ \in\ \mathbb{N}\ ,\ \exists\ x_n\ \in\ A \mid \|x_n\| > n$.
Or, par hypothèse, $(x_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ admet une sous suite convergente.
Donc, $\exists\ (x_{n_k})_{k\geq1}$ telle que $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = x$ et $\|x\| >$ donc $x \neq 0$.
Pour k suffisamment grand, on obtient,

$$\|x_{n_k}\| > n_k > 2\|x\| \text{ d'où } \|x_{n_k} - x\| \geq \|x_{n_k}\| - \|x\| > \|x\| \quad .$$

On obtient donc $\lim_{k\to+\infty} \|x_{n_k}\| - \|x\| > \|x\|$ d'où une contradiction. ■

Proposition 27 *Soit A une partie d'un espace compact B. Alors A fermée $\Rightarrow$ A compacte.*

Démonstration

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de A. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une suite de points de B et B est compacte.
Donc $\exists$ $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ convergente vers $x \in B$. Or A est fermée donc les limites de suites convergentes de points de A sont dans A, donc $x \in A$ et par suite, A est compacte. ■

Proposition 28 *Soit A une partie d'un espace compact E. Soit B une partie d'un espace compact F. Alors $A \times B$ est une partie compacte de $E \times F$.*

Démonstration

Soit $(a_n,b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $A \times B$. Alors

$$\exists\ \phi \text{ croissante} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \ \text{ tq } (a_{\phi(n)}) \text{ convergente dans A} \quad ,$$

$$\exists\ \psi \text{ croissante} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \ \text{ tq } (b_{\Psi(\phi(n))}) \text{ convergente dans B} \quad ,$$

Par suite, $(a_{\Psi(\phi(n))},b_{\Psi(\phi(n))})$ convergente dans $A\times B$ et donc $A\times B$ est compact.
Ceci permet de mieux caractériser les compact de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 51 *Les parties compactes de $\mathbb{R}^n$ sont les parties fermées bornées.*

Démonstration

Soit A une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^n$. Alors on peut écrire :

$$A \subset \prod_{i=1}^{n} I_i \text{ , où } I_i \text{ est un intervalle compact de } \mathbb{R} \text{ ,}$$

D'après la proposition 28 ce produit de compacts est un compact. Donc A est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^n$ dans un compact, donc c'est une partie compacte. ■

Ceci signifie que de toute suite bornée de $\mathbb{R}^n$, on peut extraire une sous suite convergente.
Ceci signifie également la boule $\mathfrak{B}_f(0,1)$ de $\mathbb{R}^n$ est compacte.

4.3.2 Applications

Les applications de la notion de compacité sont très nombreuses. Nous ne retiendrons que le théorème de Weierstass et les normes équivalentes dans un evn de dimension finie.

Liens avec la continuité

Théorème 52 *Soit (E,d_1) et (F,d_2) deux espaces métriques, et soit $f : E \to F$ continue et $A \subset E$, A compacte. Alors $f(A)$ est compacte.*

Démonstration

Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de $f(A)$.
Alors, $\exists$ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de points de A telle que $y_n = f(x_n)$. Or A est compacte. Donc $\exists$ $(x_{n_k})_{k \geq 1}$ tq $\lim_{k \to +\infty} x_{n_k} = x \in A$. Or f est continue, donc $\lim_{k \to +\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \to +\infty} y_{n_k} = f(x)$. Donc $f(x) \in f(A)$ et la suite $(y_{n_k})_{k \geq 1}$ est convergente dans $f(A)$. Donc $f(A)$ est compacte. ∎

Théorème 53 *Une fonction numérique continue sur un compact atteint ses bornes. Autrement dit, soit $f : E \to \mathbb{R}$ continue, $A \subset E$ et A compacte.*

$$\exists\, x_* \in A \;\; tq \;\; \inf_{x \in A} f(x) = f(x_*) \;\; et \;\; \exists\, x^* \in A \;\; tq \;\; \sup_{x \in A} f(x) = f(x^*) \quad .$$

Démonstration

$f(A)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$. D'après le théorème 51, $f(A)$ est donc un fermé borné. Or, dans $\mathbb{R}$, toute partie fermée bornée admet une borne supérieure, c'est le plus petit des majorants.
Posons,

$$\sup_{x \in A} f(x) = M \quad .$$

Soit $\epsilon > 0$. Alors $M - \epsilon$ n'est pas le plus petit des majorants. Donc,

$$\exists\, x \in A \mid M - \epsilon \leq f(x) < M, \text{ donc } \mathfrak{B}(M,\epsilon) \cap f(A) \neq \emptyset \text{ donc } M \in \overline{f(A)} \quad .$$

Or $f(A)$ est fermée. Donc $M \in f(A)$, d'où l'existence de x^*. La démonstration est similaire pour x_*. ∎

Ce théorème est très important et permet, entre autres de montrer le théorème sur les evn de dim finie.

Liens avec les evn de dimension finie

Théorème 54 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors, toutes les normes sur E sont équivalentes.*

Démonstration

On suppose E ev sur $\mathbb{R}$ et $dim E = n$.
Soit $(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ une base quelconque de E soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et soit,

$$\begin{array}{rccc} \phi : & E & \to & \mathbb{R}^n \\ & x & \mapsto & (x_1,x_2,\ldots,x_n) \end{array}$$

Munissons E de la norme

$$N_\infty(x) = \sup_{i \in \{1\ldots n\}} \|x_i\| \quad ,$$

et munissons $\mathbb{R}^n$ de la norme de l'espace produit $\|\|$.
Alors $\forall\, x \in E$, $\|\phi(x)\| = N_\infty(x)$.
ϕ est bijective et de plus, ϕ et ϕ^{-1} sont continues. Ce sont donc des homéomorphismes.
Soit N une norme quelconque sur E. Montrons que N est équivalentes à N_∞.
Montrons $N(x) \leq \alpha N_{infty}(x)$.
On a:

$$N(x) = N(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| N(e_i) \leq N_\infty(x) \left(\sum_{i=1}^{n} N(e_i) \right) .$$

D'où

$$N(x) \leq \alpha N_\infty(x) \text{ avec } \alpha = \sum_{i=1}^{n} N(e_i) .$$

Montrons $N_\infty(x) \leq \beta N(x)$.
Ceci est plus délicat et nécessite le lemme suivant :

Lemme 3 *La sphère unité* $\mathfrak{S}(0,1) = \{x \in E \mid N_\infty = 1\}$ *est un compact de E.*
Démonstration

Puisque ϕ est bijective et conserve la norme, on a

$$\mathfrak{S}_E(0,1) = \phi^{-1}\left(\mathfrak{S}_{\mathbb{R}^n}(0,1)\right) .$$

Or, $\mathfrak{S}_{\mathbb{R}^n}(0,1)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$ d'après le théorème 51 et Φ^{-1} est continue. Donc, d'après le théorème 53, $\mathfrak{S}(0,1)$ est compacte. ∎

Considérons alors la fonction

$$\begin{array}{rccc} \psi : & (E,N_\infty) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & N(x) \end{array}$$

ψ est continue. En effet : soit $(x,y) \in E \times E$. Alors,

$$|\psi(x) - \psi(y)| = |N(x) - N(y)| \leq N(x-y) \leq \alpha N_\infty(x-y) .$$

Donc d'après le théorème 53 ψ est bornée sur $\mathfrak{S}_E(0,1)$ et atteint ses bornes.
Posons:

$$m = \inf_{x \in \mathfrak{S}_E(0,1)} \psi(x) = \psi(a) \text{ øù } a \in \mathfrak{S}_E(0,1) .$$

D'après les propriétés sur les normes, $a \neq 0$ et $\psi(a) > 0$. En effet, $N_\infty(a) = 1$ donc $a \neq 0$ et donc $N(a) > 0$. Donc $m > 0$.
Donc, $\forall\, u \in \mathfrak{S}_E(0,1)$, $\psi(u) \geq m$,
Soit $x \in E\backslash\{0\}$. Alors

$$\frac{x}{N_\infty(x)} \in \mathfrak{S}_E(0,1) \text{ donc } N\left(\frac{x}{N_\infty(x)}\right) \geq m \text{ donc } N(x) \geq m N_\infty(x) .$$

Or $m > 0$ et par suite :

$$\forall\, x \in E,\, N_\infty(x) \leq \frac{1}{m} N(x) \text{ d'où } \beta = \frac{1}{m} .$$

∎

Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, de nombreux concepts sont donc indépendants de la norme utilisée: partie bornées, compactes, suites convergentes, limites, continuité, suites de Cauchy, parties complètes etc.

4.4 Applications linéaires continues

Rappel :

Définition 59 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, et $f : E \to F$. f est une application linéaire ssi*

$$\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (x,y) \in E \times E, f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) \quad .$$

On note $\mathcal{L}(E,F) = \{f : E \to F,\ f \text{ est linéaire}\}$. Dans cet espace il est aisé de caractériser les applications continues:

Théorème 55 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors les trois caractérisations suivantes sont équivalentes :*

1. *f est continue sur E.*
2. *f est continue en 0_E.*
3. *$\exists\, k \in \mathbb{R}_+ \mid \forall\, x \in E, \|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E$.*

Démonstration

1) $\Rightarrow$ 2) est évident.

Montrons 2) $\Rightarrow$ 3). Soit f continue en 0_E. Pour $\epsilon = 1$, on obtient :

$$\exists\, \alpha > 0, \text{ tq } \|x\| \leq \alpha \to \|f(x)\| < 1 \; .$$

Soit $u \in E$. Alors

$$\frac{\alpha}{2}\frac{u}{\|u\|} \in \mathfrak{B}(0,\alpha) \text{ donc } \|f(\frac{\alpha}{2}\frac{u}{\|u\|})\| < 1 \; .$$

Donc

$$\|f(u)\| < \frac{2}{\alpha}\|u\| \;\text{ d'où } k = \frac{2}{\alpha} \; .$$

Montrons 3) $\to$ 1)

f est k-lipschitzienne car $\|f(x) - f(y)\| = \|f(x - y)\| \leq k\|x - y\|$, donc f est continue. ■

On note $\mathcal{L}_C(E,F) = \{f : E \to F,\ f \text{ est linéaire continue}\}$.

Corollaire 15 *L'application*

$$\begin{array}{cccc} N: & \mathcal{L}_C(E,F) & \to & \mathbb{R}_+ \\ & f & \mapsto & N(f) = \sup_{x \neq 0_E} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \end{array} ,$$

est une norme.

Donc $(\mathcal{L}_C(E,F),N)$ est un evn. Par abus de language on note souvent $\|f\|$ cette norme.

4.4.1 Norme d'une application linéaire composée quand $E{=}F$

Soient f et g deux applications de $\mathcal{L}_C(E,E)$

Proposition 29 *On a*

$$\|g \circ f\| \leq \|g\|\|f\| .$$

Démonstration

On a

$$\forall\, x \in E, \|f(x)\| \leq \|f\|\|x\| ,$$

et

$$\forall\, y \in E, \|g(y)\| \leq \|g\|\|y\| .$$

Par suite,

$$\forall\, x \in E, \|g(f(x))\| \leq \|g\|\|f\|\|x\| .$$

■

4.4.2 Caractérisation de l'équivalence de normes

Soit $Id_E\ (E,N) \to (E,N')$ Alors $Id_E \in \mathcal{L}(E,E)$ donc
Id_E est continue $\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{R}_+ \mid N'(x) \leq kN(x)$.
D'où le théorème suivant :

Théorème 56 *$Id_E\ (E,N) \to (E,N')$ est bi continue ssi $N \sim N'$ ou ssi tout ouvert de (E,N) est un ouvert de (E,N') et réciproquement.*

4.4.3 Caractérisation des applications bilinéaires continues

Soit

$$f : \begin{array}{ccc} E_1 \times E_2 & \to & F \\ (x_1,x_2) & \mapsto & f(x_1,x_2) \end{array}$$

Théorème 57 *On suppose f bilinéaire. Alors*

$$f \text{ continue } \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{R}_+ \mid \|f(x_1,x_2)\|_F \leq k\|x_1\|\|x_2\| .$$

4.5 Espaces pré-hilbertiens, espace de Hilbert

4.5.1 Espaces de Hilbert

Rappel:

Définition 60 *Un espace vectoriel E, muni d'une forme hermitienne $E \to E$ sur K définie positive, est appelé espace préhilbertien.*

Alors $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$ est une norme sur E.

Définition 61 *Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet*

La connaissance de $\|x\|$ pour tout $x \in E$, suffit à d'eterminer le produit hermitien. On a en effet:

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathcal{R}\mathrm{e}(x|y)\ ,$$

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\mathcal{R}\mathrm{e}(x|y)\ ,$$

D'où la formule dite du parallèlogramme

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)\ .$$

Par soustraction, on obtient:
si $K = \mathbb{R}$,

$$(x|\,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)\ .$$

si $K = \mathbb{C}$,

$$\mathcal{I}\mathrm{m}(x|\,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right)\ .$$

D'où

$$(x|\,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2)\right)\ .$$

4.5.2 Orthogonalité

Définition 62 *Soit E un espace préhilbertien. On dit que x et y sont orthogonaux ssi $(x|\,y) = 0$. Pour $A \subset E$, on note $A^{\perp} = \{x \in E \mid \forall\, y \in A, (x|\,y) = 0\}$.*

Théorème 58 *Soit E un espace préhilbertien. Si x et y sont orthogonaux, alors,*

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2\ .$$

On reconnait ici l'expression du théorème de Pythagore.

Théorème 59 *Soit A un sous espace vectoriel fermé, complet d'un espace préhilbertien E. Alors,*

$$\forall\, x \in E, \exists\,!\ \textit{point}\ p_A(x) \in A\ \textit{tq}\ \forall\, z \in A\,,\ \|x-z\| \geq \|x-p_A(x)\|\ .$$

Démonstration

Soit

$$m = d(x,A) = \inf_{z\in A}\left(\|x-z\|\right)\ .$$

Donc,

$$\exists (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A \text{ tq } \lim_{n\to+\infty}\|x-z_n\| = m\ .$$

D'après la formule du parallèlogramme, on a

$$\|z_n - z_m\|^2 = 2\left(\|z_n - x\|^2 + \|z_m - x\|^2\right) - \|z_n + z_m - 2x\|^2 \ .$$

Or,

$$\|z_n + z_m - 2x\|^2 = 4\|\frac{z_n + z_m}{2} - x\|^2 \geq 4m^2 \ .$$

Par suite, pour n et m assez grand,

$$0 \leq \|z_n - z_m\|^2 \leq 2(m^2 + \epsilon + m^2 + \epsilon) - 4m^2 \leq 4\epsilon \ ,$$

donc $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. Or A est complet, donc $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un point y de A (A est fermé) qui vérifie, $\|x - y\| = d(x,A)$.
Or, si deux points y et y' vérifient cette même égalité, on a :

$$\|y - y'\|^2 = 2\left(\|y - x\|^2 + \|y' - x\|^2\right) - 4\|\frac{y + y'}{2} - x\|^2 \ ,$$

Donc

$$0 \leq \|y - y'\| \leq 0 \ \text{ d'où } y = y' = p_A(x) \ .$$

■

Caractérisation : $p_A(x)$ est appelée projection orthogonale de x sur A.

Théorème 60 *$p_A(x)$ est caractérisée par la propriété :*

$$\forall\ z\ \in\ A,\ (x - p_A(x) |\ z) = 0\ \textit{donc}\ x - p_A(x)\ \in\ A^{\perp} \quad .$$

Démonstration

Cette démonstration suppose la démonstration du lemme suivant :

Lemme 4 *$p_A(x)$ est caractérisée par*

$$\forall\ z\ \in\ A\ \mathcal{R}e(z - p_A(x) |\ x - p_A(x)) \leq 0 \ .$$

Cette écriture signifie que l'angle $\theta = angle(z - p_A(x), x - p_A(x))$ est obtus et que son cosinus est négatif.
On a en effet:
Si $\mathcal{R}e(z - p_A(x) |\ x - p_A(x)) \leq 0$. Alors:

$$\|z - x\|^2 = (z - p_A(x) + p_A(x) - x |\ z - p_A(x) + p_A(x) - x) \ ,$$

Donc,

$$\|z - x\|^2 = \|z - p_A(x\|^2 + \|p_A(x) - x\| - 2\mathcal{R}e(z - p_A(x) |\ x - p_A(x)) \geq \|x - p_A(x)\|^2 \ ,$$

donc $p_A(x)$ est bien la projection de x sur A.
Réciproquement si $p_A(x)$ est la projection de x sur A,

$$\forall\ z\ \in\ A, \forall\ \lambda\ \in]0{,}1],\ \lambda z + (1 - \lambda)p_A(x)\ \in\ A\ ,$$

D'où,

$$\|x - p_A(x) - \lambda(z - p_A(x))\|^2 \geq \|x - p_A(x)\|^2 ,$$

D'où,

$$\lambda^2\|z - p_A(x)\|^2 - 2\lambda\mathcal{R}e(x - p_A(x)|z - p_A(x)) \geq 0 .$$

D'où le résultat en divisant par λ puis en faisant tendre λ vers O. ■

Par suite, en posant $z' = z - p_A(x)$ on obtient,

$$\forall\, z' \in A, \mathcal{R}e(x - p_A(x), z') \leq 0 .$$

Avec $z' = -z'$ on obtient,

$$\mathcal{R}e(x - p_A(x), z') = 0 ,$$

et en remplaçant avec iz' et $-iz'$, on obtient

$$(x - p_A(x)|\, z') = 0 .$$

■

Théorème 61 *L'application*

$$\begin{array}{cccc} p_A & E & \rightarrow & A \\ & x & \mapsto & p_A(x) \end{array} ,$$

est linéaire lipschitzienne, de rapport 1, donc elle est continue.

Démonstration

On a

$$\forall\, z \in A, (x - p_A(x)|\, z) = 0$$

Donc,

$$\forall\lambda \in K, \forall\, z \in A, (\lambda x - \lambda p_A(x)|\, z) = 0$$

Donc

$$p_A(\lambda x) = \lambda p_A(x)$$

De même,

$$p_A(x + y)] = p_A(x) + p_A(y)$$

Donc p_A est linéaire.
Enfin, on a

$$\|x-y\|^2 = \|p_A(x)-p_A(y)\|^2+\|x-p_A(x)+p_A(y)-y\|^2+2\mathcal{R}e(p_A(x)-p_A(y)|\, x-p_A(x)+p_A(y)-y) .$$

Or

$$\mathcal{R}e(p_A(x) - p_A(y)|\, x - p_A(x)) \geq 0 \text{ et } \mathcal{R}e(p_A(x) - p_A(y)|\, p_A(y) - y) \geq 0 .$$

Par suite

$$\|x - y\|^2 \geq \|p_A(x) - p_A(y)\|^2 .$$

■

Proposition 30

$$\left(A^{\perp}\right)^{\perp} = A \quad et \quad ,$$

$$\forall\, x \,\in\, E, x = x_1 + x_2 \text{ où } x_1 \,\in\, A\,, x_2 \,\in\, A^{\perp}\,.$$

Démonstration

Soit $x \,\in\, E$. On a $x = x - p_A(x) + p_A(x)$, d'où $x_1 \,\in\, A\,, x_2 \,\in\, A^{\perp}$.
Montrons $A \subset \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$
Soit $z \,\in\, A$, alors $\forall\, x \,\in\, A^{\perp}$, $(z|\, x) = 0$, donc $z \,\in\, \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$
Montrons $\left(A^{\perp}\right)^{\perp} \subset A$
Soit $x \,\in\, \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$. Puisque $x - p_a(x) \,\in\, A^{\perp}$, on a

$$(x|x - p_A(x)) = 0 \text{ . Or },p_A(x) \,\in\, A\text{ , donc } (p_A(x)|x - p_A(x)) = 0\,.$$

Donc

$$\|x - p_A(x)\|^2 = 0\text{ , donc } x = p(x) \,\in\, A\,.$$

■

Conclusion : Si E est un espace de Hilbert, tout sous espace vectoriel fermé est complet et donc la projection orthogonale existe. Un espace de Hilbert est donc un espace où l'on peut faire de la géométrie et où en particulier on peut appliquer le théorème de Pythagore. En particulier $\mathbb{R}^n$ est un espace de Hilbert.

4.5.3 Procédé d'orthogonalisation de Schmidt

Théorème 62 *Soit E un espace préhilbertien. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système libre dénombrable de E. On peut en déduire un système orthogonal $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que :*
$\forall\, n \,\in\, \mathbb{N}\,,\ vect(a_0,a_1,\ldots,a_n) = vect(b_0,b_1,\ldots,b_n)$.

Démonstration

On prend $a_0 = b_0$, puis on prend,
$a_1 = b_1 - p_0(b_1)$, où p_0 désigne la projection orthogonale sur $A_0 = \text{vect}(a_0)$.
A_0 est un sev de dimension finie et complet donc p_0 existe, et $a_1 \perp a_0$.
On procède alors de proche en proche, soit p_n désigne la projection orthogonale sur $A_n = \text{vect}\{(a_0,\ldots,a_n) = \text{vect}\{(b_0,\ldots,b_n)$. A_n est un sev de dimension finie et complet donc p_n existe. On prend

$$a_{n+1} = b_{n+1} - p_n(b_{n+1}) \quad \text{alors}\,,$$

$$a_{n+1} \perp A_n\text{ , et } A_{n+1} = \text{vect}\{(a_0,\ldots,a_{n+1}) = \text{vect}\{(b_0,\ldots,b_{n+1})\,.$$

■

Corollaire 16 *Si E est de dimension finie, on peut construire une base orthonormale.*
Démonstration

Il suffit de construire les $\frac{a_n}{\|a_n\|}$. ■

Table des matières

1 Rappels utiles de notations, de définitions et de logique **3**
- 1.1 Les O, o et ϵ en bref . . . 3
- 1.2 Les morphismes en bref . . . 3
- 1.3 Qu'est-ce qu'une démonstration?? . . . 4
  - 1.3.1 Quelques rappels de logique . . . 4
  - 1.3.2 Exemple de démonstration de par récurrence . . . 5

2 Rappels sur des notions d'analyse **7**
- 2.1 Éléments à savoir sur $\mathbb{R}$ . . . 7
- 2.2 Quelques éléments à savoir sur les suites . . . 11
  - 2.2.1 Suites arithmétiques . . . 11
  - 2.2.2 Suites géométriques . . . 11
  - 2.2.3 Suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ . . . 12
  - 2.2.4 Relation linéaire du premier ordre . . . 12
  - 2.2.5 Relation de récurrence affine . . . 12
  - 2.2.6 Relation de récurrence linéaire du second ordre . . . 12
- 2.3 Intégrales simples, impropres, doubles et triples . . . 14
  - 2.3.1 Intégrales définies . . . 14
  - 2.3.2 Intégrales impropres . . . 14
  - 2.3.3 Intégrales doubles et triples . . . 19
- 2.4 Rappels de trigonométrie . . . 23
- 2.5 Décomposition en éléments simples . . . 24
- 2.6 Équations différentielles simples . . . 26
  - 2.6.1 Équations différentielles linéaires du premier ordre, sans second membre . . . 26
  - 2.6.2 Équations différentielles linéaires du second ordre . . . 27
  - 2.6.3 Équations différentielles linéaires du premier ordre, avec second membre . . . 29
  - 2.6.4 Équations différentielles linéaires du second ordre avec second membre exponentiel . . . 29
- 2.7 Développements en séries entières . . . 31

3 Quelques rappels sur les espaces vectoriels et l'algèbre linéaire **33**
- 3.1 Réduction d'endomorphisme, déterminant, valeurs propres, vecteurs propres 33
  - 3.1.1 Notation, problématique matricielle . . . 33

3.1.2 Valeurs propres, vecteurs propres 34
3.1.3 Déterminant 35
3.1.4 Polynôme caractéristique 38
3.1.5 Endomorphismes diagonalisables 39
3.1.6 Endomorphismes trigonalisables 40
3.2 Espaces vectoriels normés 40
3.2.1 Normes et distances 40
3.2.2 Suites d'éléments d'un espace normé 42
3.2.3 Séries d'éléments d'un espace vectoriel normé 45
3.3 Rappel sur les normes matricielles 45

4 Pour aller plus loin...Topologie 47
4.1 Topologie d'un espace vectoriel normé 47
4.1.1 Étude locale d'une application : limite, continuité 50
4.2 Espaces complets 52
4.2.1 Définitions 52
4.2.2 Applications 54
4.3 Espaces compats 55
4.3.1 Définition, généralités 55
4.3.2 Applications 58
4.4 Applications linéaires continues 61
4.4.1 Norme d'une application linéaire composée quand $E{=}F$ 62
4.4.2 Caractérisation de l'équivalence de normes 62
4.4.3 Caractérisation des applications bilinéaires continues 62
4.5 Espaces pré-hilbertiens, espace de Hilbert 62
4.5.1 Espaces de Hilbert 62
4.5.2 Orthogonalité 63
4.5.3 Procédé d'orthogonalisation de Schmidt 66