Ensimag 1A **2021-2022**

Soutien de Probabilités appliquées

Durée 1h00 - *Tous documents autorisés*

Les exercices sont de difficulté croissante. On prendra soin de rédiger et justifier ses réponses.
Abréviations utilisées dans ce sujet (vous pouvez aussi les utiliser) :
— v.a. : Variable Aléatoire
— div. : divise
— i.e. : *id est* (latin) -> c'est-à-dire

Questions de cours (8 points)

1. On suppose un dé équilibré à 6 faces. Soit X la v.a. telle que $X = 0$ si le résultat du dé est inférieur ou égal à 2 et $X = 1$ sinon. Quelle est la loi de X ? Donner son espérance.

Réponse

Soit C l'évènement "Le résultat du dé est inférieur ou égal à 2", alors $X = \mathbb{1}_C$, donc X suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(C)$:

$$X \sim Bernoulli(\mathbb{P}(C))$$

Et :

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(\text{"Le résultat du dé est 1"} \cup \text{"Le résultat du dé est 2"}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

L'espérance de X est :

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{3}$$

2. On fait n lancés du dé précédemment introduit. Quelle est la loi de N, le nombre de lancés ayant un résultat supérieur à 2 parmi les n lancés ? Donner son espérance.

Réponse

On répète ici une expérience de Bernoulli de paramètre $1 - \mathbb{P}(C)$ n fois et on compte le nombre de réussites N. Ainsi N suit la loi binomiale de paramètres n et $1 - \mathbb{P}(C)$:

$$N \sim B(n, 1 - \mathbb{P}(C))$$

L'espérance de N est :

$$\mathbb{E}[N] = n(1 - \mathbb{P}(C)) = \frac{2n}{3}$$

3. Quelle est la loi du nombre de lancés L avant d'obtenir un résultat supérieur à 2 ? Donner son espérance.

Réponse

On répète ici une expérience de Bernoulli de paramètre $1 - \mathbb{P}(C)$ jusqu'à la première réussite (le nombres d'expériences est noté L). Ainsi L suit la loi géométrique de paramètre $1 - \mathbb{P}(C)$:

$$N \sim Geom(1 - \mathbb{P}(C))$$

L'espérance de L est :

$$\mathbb{E}[L] = \frac{1}{1 - \mathbb{P}(C)} = \frac{3}{2}$$

4. Soit U une v.a. uniforme dans $(0, 1)$ et Y une v.a. telle que $Y = U$ si le résultat du dé est inférieur ou égal à 2 et $Y = 2U$ sinon. Calculer l'espérance de Y.

Réponse

On applique ici la formule de l'espérance totale :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|C]] \\
&\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[Y|C \text{ vrai}]\,\mathbb{P}(C \text{ vrai}) + \mathbb{E}[Y|C \text{ faux}]\,\mathbb{P}(C \text{ faux}) \\
&\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[U]\,\mathbb{P}(C \text{ vrai}) + \mathbb{E}[2U]\,\mathbb{P}(C \text{ faux}) \\
&\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[U]\,\mathbb{P}(C \text{ vrai}) + 2\mathbb{E}[U]\,\mathbb{P}(C \text{ faux}) \\
&\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[U]\,(\mathbb{P}(C \text{ vrai}) + 2\mathbb{P}(C \text{ faux})) \\
&\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + 2\frac{2}{3}\right) \\
&\mathbb{E}[Y] = \frac{5}{6}
\end{aligned}$$

5. Soit D la v.a. du résultat du dé. Soit :

$$Z = \sum_{k \text{ div. } D} k$$

i.e. Z est la somme des diviseurs de D. Donnez une modélisation de Z grâce au concept de variable étagée. Calculez l'espérance de Z. (Ne cherchez pas une formule pour la probabilité des diviseurs, donnez directement la probabilité en la calculant à la main)

Réponse

On peut modéliser Z comme étant :

$$Z = \sum_{k=1}^{6} k \mathbb{1}_{k \text{ div.} D}$$

Et d'après la formule de l'espérance d'une v.a. étagée, on a :

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{k=1}^{6} k \mathbb{P}(k \text{ div.} D)$$

Or :

$$\mathbb{P}(1 \text{ div.} D) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{6} D = i\right) = 1$$
$$\mathbb{P}(2 \text{ div.} D) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{3} D = 2i\right) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$
$$\mathbb{P}(3 \text{ div.} D) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{2} D = 3i\right) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$
$$\mathbb{P}(4 \text{ div.} D) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{1} D = 4i\right) = \frac{1}{6}$$
$$\mathbb{P}(5 \text{ div.} D) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{1} D = 5i\right) = \frac{1}{6}$$
$$\mathbb{P}(6 \text{ div.} D) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{1} D = 6i\right) = \frac{1}{6}$$

Donc :

$$\mathbb{E}[Z] = 1 + 2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{3} + 4\frac{1}{6} + 5\frac{1}{6} + 6\frac{1}{6}$$
$$\mathbb{E}[Z] = 4 + \frac{3}{2}$$
$$\mathbb{E}[Z] = \frac{11}{2}$$

Exercice (12 points)

Soit U une v.a. de loi uniforme sur (0,1), $\alpha > 0$ et A un événement de probabilité p, $0 < p < 1$. On suppose que l'événement A est indépendant de la variable U.

On parie sur la réalisation de A. Si A se réalise, le gain est $X = \alpha U^2$. Sinon le gain est $X = -U$ (on perd U). On dit que le pari est favorable si l'espérance de gain est positive.

1. Déterminer la fonction de répartition de la loi de la variable X.

Réponse

On a $X = \alpha U^2$ si A est vrai et $X = -U$ sinon, on en déduit $X \in [-1, \alpha]$ donc, $\forall t < -1, F_X(t) = 0$ et $\forall t > \alpha, F_X(t) = 1$.
Ensuite, $\forall t \in [-1, \alpha]$:

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(X \leq t|A)\,\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}\big(X \leq t|\overline{A}\big)\,\mathbb{P}\big(\overline{A}\big)$$
$$F_X(t) = \mathbb{P}\big(\alpha U^2 \leq t\big)\,\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(-U \leq t)\,\mathbb{P}\big(\overline{A}\big)$$
$$F_X(t) = \mathbb{P}\big(\alpha U^2 \leq t\big)\,p + \mathbb{P}(-U \leq t)\,(1-p)$$

Calculons $\mathbb{P}(\alpha U^2 \leq t)$ et $\mathbb{P}(-U \leq t)$. On a $\alpha U^2 \in [0, \alpha]$, donc :

$$\begin{cases} \mathbb{P}(\alpha U^2 \leq t) = 0 & , t < 0 \\ \mathbb{P}(\alpha U^2 \leq t) = 1 & , t > \alpha \\ \mathbb{P}(\alpha U^2 \leq t) = \mathbb{P}\left(U \leq \sqrt{\frac{t}{\alpha}}\right) = \sqrt{\frac{t}{\alpha}} & , t \in [0, \alpha] \end{cases}$$

On a $-U \in [-1, 0]$, donc :

$$\begin{cases} \mathbb{P}(-U \leq t) = 0 & , t < -1 \\ \mathbb{P}(-U \leq t) = 1 & , t > 0 \\ \mathbb{P}(-U \leq t) = \mathbb{P}(U \geq -t) = 1 - (-t) = 1 + t & , t \in [-1, 0[\end{cases}$$

Finalement :

$$\begin{cases} F_X(t) = 0 & , t < -1 \\ F_X(t) = (1+t)(1-p) & , t \in [-1, 0[\\ F_X(t) = p\sqrt{\frac{t}{\alpha}} + (1-p) & , t \in]0, \alpha] \\ F_X(t) = 1 & , t > \alpha \end{cases}$$

(On peut exclure le cas $t = 0$ car $\forall x, \mathbb{P}(X = x) = 0$ pour faciliter la question de la continuité, c.f. question suivante où on pourra conclure sur la valeur de la fonction de répartition ici)

2. La v.a. X admet-elle une densité ? Justifier.

Réponse

Pour que la v.a. X admette une fonction de densité il est nécessaire et suffisant qu'elle soit continue et dérivable presque partout. F_X est continue par morceaux, et sur chaque morceau F_X est dérivable, ainsi, F_X est dérivable presque partout. Vérifions la continuité de F_X sur les points de ruptures ($-1, 0$ et α).
Continuité en -1 :

$$\lim_{t\to -1^-} F_X(t) = \lim_{t\to -1^-} 0 = 0$$
$$\lim_{t\to -1^+} F_X(t) = \lim_{t\to -1^+} (1+t)(1-p) = 0$$

Donc F_X est continue en -1.
Continuité en 0 :

$$\lim_{t\to 0^-} F_X(t) = \lim_{t\to 0^-} (1+t)(1-p) = 1-p$$
$$\lim_{t\to 0^+} F_X(t) = \lim_{t\to 0^+} p\sqrt{\frac{t}{\alpha}} + (1-p) = 1-p$$

Donc F_X est continue en 0 et on peut poser $F_X(0) = 1-p$.
Continuité en α :

$$\lim_{t\to \alpha^-} F_X(t) = \lim_{t\to \alpha^-} p\sqrt{\frac{t}{\alpha}} + (1-p) = 1$$
$$\lim_{t\to \alpha^+} F_X(t) = \lim_{t\to \alpha^+} 1 = 1$$

Donc F_X est continue en α.
F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable presque partout, donc F_X admet une densité que l'on notera f_X.

3. Calculer la densité de X.

Réponse

$$f_X(t) = \frac{d}{dt}F_X(t)$$
$$\begin{cases} f_X(t) = 0 & , t \in]-\infty, -1[\cup]\alpha, +\infty[\\ f_X(t) = 1-p & , t \in]-1, 0[\\ f_X(t) = \frac{1}{2\alpha}\frac{p}{\sqrt{\frac{t}{\alpha}}} & , t \in]0, \alpha[\end{cases}$$

4. Justifier que X peut s'écrire de la manière suivante :

$$X = \alpha U^2 \mathbb{1}_A - U \mathbb{1}_{\overline{A}}$$

Réponse

Si A se réalise, on a $X = \alpha U^2$, si A ne se réalise pas (donc si $\overline{A}$ se réalise), on a $X = -U$. Donc :

$$X = \alpha U^2 \mathbb{1}_A - U \mathbb{1}_{\overline{A}}$$

5. Calculer $\mathbb{E}[X]$. Sous quelle condition portant sur α le pari est-il favorable ? Dans les questions suivantes, on suppose que $\alpha = 1$.

Réponse

Le pari est favorable si $\mathbb{E}[X]$ est positif. Calculons $\mathbb{E}[X]$:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} t f_X(t) dt$$
$$\mathbb{E}[X] = \int_{-1}^{0} t(1-p) dt + \int_0^\alpha t \frac{1}{2\alpha} \frac{p}{\sqrt{\frac{t}{\alpha}}} dt$$
$$\mathbb{E}[X] = (1-p) \int_{-1}^{0} t dt + \frac{p\sqrt{\alpha}}{2\alpha} \int_0^\alpha t\ t^{-\frac{1}{2}} dt$$
$$\mathbb{E}[X] = (1-p) \left[\frac{t^2}{2} \right]_{-1}^{0} + \frac{p\sqrt{\alpha}}{2\alpha} \int_0^\alpha t^{\frac{1}{2}} dt$$
$$\mathbb{E}[X] = -\frac{1-p}{2} + \frac{p\sqrt{\alpha}}{2\alpha} \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_0^\alpha$$
$$\mathbb{E}[X] = -\frac{1-p}{2} + \frac{p\alpha}{3}$$

Et :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[X] > 0 \\ \iff & -\frac{1-p}{2} + \frac{p\alpha}{3} > 0 \\ \iff & \alpha > \frac{3}{2} \frac{1-p}{p} \end{aligned}$$

6. Calculer $\mathbb{E}[X^2]$.

Réponse

Ici $\alpha = 1$

$$\mathbb{E}\big[X^2\big] = \int_{\mathbb{R}} t^2 f_X(t)dt$$
$$\mathbb{E}\big[X^2\big] = \int_{-1}^{0} t^2(1-p)dt + \int_0^1 t^2\ \frac{p}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt$$
$$\mathbb{E}\big[X^2\big] = (1-p)\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \frac{p}{2}\int_0^1 t^{\frac{3}{2}}dt$$
$$\mathbb{E}\big[X^2\big] = \frac{1-p}{3} + \frac{p}{2}\left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\right]_0^1$$
$$\mathbb{E}\big[X^2\big] = \frac{1-p}{3} + \frac{p}{5}$$

7. Calculer $\mathrm{Var}[X]$. Pour quelle valeur de p la variance est-elle maximale ?

Réponse

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2$$
$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{3} + \frac{p}{5} - \left(-\frac{1-p}{2} + \frac{p}{3}\right)^2$$
$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{3} + \frac{p}{5} - \left(\frac{1-2p+p^2}{4} - 2\frac{p-p^2}{6} + \frac{p^2}{9}\right)$$
$$\mathrm{Var}(X) = \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{9}\right)p^2 + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)p + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$
$$\mathrm{Var}(X) = -\frac{25}{36}p^2 + \frac{7}{10}p + \frac{1}{12}$$

Le coefficient devant le monôme de degré 2 est négatif, donc la dérivée s'annule bien pour un maximum. Calculons la dérivée de la variance par rapport à p :

$$\frac{d}{dp}\mathrm{Var}(X) = -\frac{25}{18}p + \frac{7}{10}$$

Et :

$$\frac{d}{dp}\mathrm{Var}(X) = 0$$
$$\iff -\frac{25}{18}p + \frac{7}{10} = 0$$
$$\iff \frac{25}{18}p = \frac{7}{10}$$
$$\iff p = \frac{63}{125}$$