Probabilités Appliquées
Soutien

Enseignant : Romain Rombourg
Mail : romain.rombourg@grenoble-inp.fr

Exercice 1

- Deux serveurs surveillent deux flux de trafic internet. Le premier Repère, en moyenne une anomalie par seconde, Le second, une anomalie toutes les deux secondes. Soit N_k le nombre d'anomalies repérées par le serveur k en une seconde.

Q1 : Quelle est la loi des N_k ?

Q2 : Quelle est la loi suivie par le total d'anomalies repérées par seconde par les deux serveurs

Exercice 2

- Soit h une fonction continue sur un intervalle $[I, J]$ de longueur L possédant un unique zéro x_0 sur cet intervalle. De plus $h(x) < 0$ pour $x < x_0$ et $h(x) > 0$ pour $x > x_0$. On considère l'algorithme suivant :
  - On tire au hasard B selon $\mathcal{U}(0, L)$ jusqu'à avoir $h(I + B) > 0$
  - On tire au hasard A selon $\mathcal{U}(0, B)$ jusqu'à avoir $h(I + A) < 0$
  - On fait une recherche dichotomique sur $[A, B]$ à une précision ε
- On cherche à calculer la complexité moyenne de cet algorithme. On notera N_B le nombre d'étapes nécessaires pour générer B, N_A le nombre d'étapes pour générer A et N_D le nombre d'étapes nécessaires pour faire la dichotomie. Le nombre total d'opérations est noté N

Q1 : Comment exprimer $\mathbb{E}[N]$ en fonction de N_B, N_A, N_D ?

Q2 : Pour un algorithme de dichotomie classique, que vaut N_D ?

Q3 : Exprimer $\mathbb{E}[N_B]$ en fonction de $f = \dfrac{x_0 - I}{L}$

Q4 : Exprimer $\mathbb{E}[N_A]$ en fonction de f

Q5 : Soit $T = B - A$, exprimer $F_T(x)$

Q6 : Est-ce que f_T existe ? Prouvez votre réponse.

Q7 : Exprimer $\mathbb{E}[N_D]$ en fonction de f, L, ε

Q1 : Comment exprimer $\mathbb{E}[N]$ en fonction de N_B, N_A, N_D ?

$$\mathbb{E}[N] = \mathbb{E}[N_B] + \mathbb{E}[N_A] + \mathbb{E}[N_D]$$

Par linéarité de l'espérance

<u>Q2 :</u> Pour un algorithme de dichotomie classique, que vaut N_D ?

On cherche N_D le plus petit possible t.q. : $\dfrac{L}{2^{N_D}} \leq \varepsilon$

d'où : $N_D = \left\lceil \log_2 \left(\dfrac{L}{\varepsilon} \right) \right\rceil$

<u>Q3 :</u> Exprimer $\mathbb{E}[N_B]$ en fonction de $f = \dfrac{x_0 - I}{L}$

B est valide ssi : $h(I+B) > 0 \iff I + B > x_0 \iff B > x_0 - I$

Or : $\mathbb{P}(B > x_0 - I) = 1 - \mathbb{P}(B \leq x_0 - I) = 1 - \dfrac{x_0 - I}{L} = 1 - f$

Et N_B est le nombre de tirage jusqu'à avoir B valide

Donc : $N_B \sim Geom(\mathbb{P}(B \text{ valide }))$

$$\text{Finalement : } \mathbb{E}[N_B] = \frac{1}{1-f}$$

Q4 : Exprimer $\mathbb{E}[N_A]$ en fonction de f

Par la formule de l'espérance totale on a : $\mathbb{E}[N_A] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[N_A|B]]$

Exprimons $\mathbb{E}[N_A|B]$:
Sachant une réalisation particulière de B, $(B = b)$, on a :
$A|B = b \sim \mathcal{U}(0, b)$
A est valide ssi : $h(I + A) < 0 \iff I + A < x_0 \iff A < x_0 - I$

Or : $\mathbb{P}(A < x_0 - I|B = b) = \dfrac{x_0 - I}{b} = \dfrac{fL}{b}$

Et : $N_A|B = b \sim Geom(\mathbb{P}(A \text{ valide } |B = b))$

$$\text{D'où : } \mathbb{E}[N_A|B = b] = \frac{b}{fL}$$

<u>Q4 :</u> Exprimer $\mathbb{E}[N_A]$ en fonction de f

Une réalisation valide de B, $(B = b)$, implique $b \in [fL, L]$

Ainsi après la première phase on a $B \sim \mathcal{U}(fL, L)$

Et : $\mathbb{E}[N_A] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[N_A|B]] = \displaystyle\int_{fL}^{L} \mathbb{E}[N_A|B = b]\, f_B(b)db$

$$\mathbb{E}[N_A] = \int_{fL}^{L} \frac{b}{fL}\frac{1}{(1-f)L}db = \frac{1}{f(1-f)L^2}\int_{fL}^{L} b\ db$$

$$\mathbb{E}[N_A] = \frac{1}{f(1-f)L^2}\left(\frac{L^2}{2} - \frac{f^2L^2}{2}\right)$$

$$\mathbb{E}[N_A] = \frac{1}{2}\frac{1-f^2}{f-f^2}$$

Q5 : Soit $T = B - A$, exprimer $F_T(x)$

$$F_T(x) = \mathbb{P}(T \leq x) = \mathbb{P}(B - A \leq x)$$

En appliquant la formule des probabilités totales, on a :

$$F_T(x) = \int_{fL}^{L} \mathbb{P}(b - A \leq x | B = b)\, f_B(b) db$$

$$F_T(x) = \int_{fL}^{L} (1 - \mathbb{P}(A \leq b - x))\, f_B(b) db$$

Or, après la deuxième phase on a $A \sim \mathcal{U}(0, fL)$: J'ai fait une erreur durant la séance

$$\begin{cases} \mathbb{P}(A < t) = \frac{t}{fL} & \text{, si } t \in [0, fL] \\ \mathbb{P}(A < t) = 1 & \text{, si } t > fL \\ \mathbb{P}(A < t) = 0 & \text{, si } t < 0 \end{cases}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} \mathbb{P}(A < b - x) = \frac{b-x}{fL} & \text{, si } b - x \in [0, fL] \\ \mathbb{P}(A < b - x) = 1 & \text{, si } b - x > fL \\ \mathbb{P}(A < b - x) = 0 & \text{, si } b - x < 0 \end{cases}$$

<u>Q5 :</u> Soit $T = B - A$, exprimer $F_T(x)$

De plus, comme T est la longeur de l'intervalle $[A, B]$, on sait que :

$$\begin{cases} F_T(x) = 0 & \text{, si } x < 0 \\ F_T(x) = 1 & \text{, si } x > L \end{cases}$$

Ainsi on peut se limiter au calcul de $F_T(x)$ pour $x \in [0, L]$

On a donc, pour $f \leq 0,5$ et $x \in [0, fL]$:

$$F_T(x) = \int_{fL}^{L} (1 - \mathbb{P}(A < b - x | B = b))\, f_B(b)db$$

$$F_T(x) = \int_{fL}^{fL+x} \left(1 - \frac{b-x}{fL}\right) f_B(b)db + \int_{fL+x}^{L} (1-1) f_B(b)db$$

$$F_T(x) = \frac{x^2}{2f(1-f)L^2}$$

Q5 : Soit $T = B - A$, exprimer $F_T(x)$

On a donc, pour $f \leq 0,5$ et $x \in]fL, (1-f)L[$:

$$F_T(x) = \int_{fL}^{L} (1 - \mathbb{P}(A < b - x | B = b))\, f_B(b) db$$

$$F_T(x) = \int_{fL}^{x} (1-0) f_B(b) db + \int_{x}^{fL+x} \left(1 - \frac{b-x}{fL}\right) f_B(b) db + \int_{fL+x}^{L} (1-1) f_B(b) db$$

$$F_T(x) = \frac{1}{(1-f)L}\left(x - \frac{fL}{2}\right)$$

<u>Q5 :</u> Soit $T = B - A$, exprimer $F_T(x)$

On a donc, pour $f \leq 0,5$ et $x \in [(1-f)L, L]$:

$$F_T(x) = \int_{fL}^{L} (1 - \mathbb{P}(A < b - x | B = b))\, f_B(b) db$$

$$F_T(x) = \int_{fL}^{x} (1-0) f_B(b) db + \int_{x}^{L} \left(1 - \frac{b-x}{fL}\right) f_B(b) db$$

$$F_T(x) = 1 - \frac{(x-L)^2}{2f(1-f)L^2}$$

<u>Q5 :</u> Soit $T = B - A$, exprimer $F_T(x)$

Finalement pour $f \leq 0,5$:

$$F_T(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2f(1-f)L^2} & , \text{si } x \in [0, fL] \\ \frac{1}{(1-f)L}\left(x - \frac{fL}{2}\right) & , \text{si } x \in]fL, (1-f)L[\\ 1 - \frac{(x-L)^2}{2f(1-f)L^2} & , \text{si } x \in [(1-f)L, L] \end{cases}$$

<u>Q5 :</u> Soit $T = B - A$, exprimer $F_T(x)$

On a donc, pour $f > 0,5$ et $x \in [0, (1-f)L]$:

$$F_T(x) = \int_{fL}^{L} (1 - \mathbb{P}(A < b - x | B = b))\, f_B(b)db$$

$$F_T(x) = \int_{fL}^{fL+x} \left(1 - \frac{b-x}{fL}\right) f_B(b)db + \int_{fL+x}^{L} (1-1) f_B(b)db$$

$$F_T(x) = \frac{x^2}{2f(1-f)L^2}$$

<u>Q5 :</u> Soit $T = B - A$, exprimer $F_T(x)$

On a donc, pour $f > 0,5$ et $x \in](1-f)L, fL[$:

$$F_T(x) = \int_{fL}^{L} (1 - \mathbb{P}(A < b - x | B = b))\, f_B(b) db$$

$$F_T(x) = \int_{fL}^{L} \left(1 - \frac{b-x}{fL}\right) f_B(b) db$$

$$F_T(x) = 1 - \frac{1-f^2}{2f(1-f)L^2} + \frac{x}{fL}$$

Q5 : Soit $T = B - A$, exprimer $F_T(x)$

On a donc, pour $f > 0,5$ et $x \in [fL, L]$:

$$F_T(x) = \int_{fL}^{L} (1 - \mathbb{P}(A < b - x | B = b))\, f_B(b) db$$

$$F_T(x) = \int_{fL}^{x} (1-0) f_B(b) db + \int_{x}^{L} \left(1 - \frac{b-x}{fL}\right) f_B(b) db$$

$$F_T(x) = 1 - \frac{(x-L)^2}{2f(1-f)L^2}$$

<u>Q5 :</u> Soit $T = B - A$, exprimer $F_T(x)$

Finalement pour $f > 0,5$:

$$F_T(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2f(1-f)L^2} & , \text{si } x \in [0, (1-f)L] \\ 1 - \frac{1-f^2}{2f(1-f)L^2} + \frac{x}{fL} & , \text{si } x \in](1-f)L, fL[\\ 1 - \frac{(x-L)^2}{2f(1-f)L^2} & , \text{si } x \in [fL, L] \end{cases}$$

<u>Q6 :</u> Est-ce que f_T existe ? Prouvez votre réponse.

Pour que f_T existe il faut que F_T soit continue et dérivable presque partout.

Les trois portions de la définition de F_T sont dérivables, dans chaque cas

Ainsi, si F_T est continue alors f_T existe.

On peut vérifier que les limites à droite et à gauche sont identiques à chaque jonction et dans chaque cas.

On en déduit que F_T est continue, donc f_T existe.